

1. Пусть $f(x)$ — непрерывная на отрезке $[0, 1]$ функция такая, что для некоторого бесконечного множества M натуральных чисел выполнено условие

$$\int_0^1 f(x)x^m dx = 0$$

для всех $m \in M$. Доказать, что $f(1) = 0$. **(4 б.)**

2. Найти наибольшее значение функции

$$f = |x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 - x_2x_4|$$

на единичном кубе $\{x \in \mathbb{R}^4 \mid |x_k| \leq 1, 1 \leq k \leq 4\}$. **(4 б.)**

3. В квадратной матрице A порядка $2n$ на главной диагонали стоят нули, а остальные элементы равны ± 1 . Доказать, что $\det A \neq 0$. **(5 б.)**

4. График функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ переходит в себя при повороте на 90° (против часовой стрелки).

(а) Докажите, что уравнение $x = f(x)$ имеет ровно одно решение.

(б) Покажите, что $f(x)$ имеет бесконечное число точек разрыва.

(в) Приведите пример такой функции $f(x)$. **(5 б.)**

5. Сколько точек (x, y, z) с целыми координатами лежит в первом октанте $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ на поверхности

$$(x + y - n)^2 = n^2 - z \quad (n \in \mathbb{N})?$$

(5 б.)

6. Частица движется из точки A в точку B по прямой, не меняя направления движения. Расстояние $AB = 1$, время движения равно 1, в начальный и конечный моменты времени движения скорость равна 0. Доказать, что в некоторый момент времени абсолютная величина ускорения частицы равна 4. **(5 б.)**

7. Всегда ли будет связным множество, полученное из открытого единичного квадрата удалением счетного множества точек? **(5 б.)**

8. Пусть $A = (a_{ij})$ — невырожденная матрица порядка n , $a_{ij} > 0$ для любых i, j . Доказать, что $z_n \leq n^2 - 2n$, где z_n — число нулевых элементов в матрице A^{-1} . **(6 б.)**

9. Даны целочисленные матрицы A и B порядка 5. Известно, что матрицы $A, A + B, A + 2B, \dots, A + 20B$ имеют целочисленные обратные. Доказать, что матрица $A + 2010B$ также имеет целочисленную обратную. **(6 б.)**

10. Пусть $x_0 = a, x_1 = b$, а $x_n = (1 - \frac{1}{n})x_{n-1} + \frac{1}{n}x_{n-2}, n = 2, 3, \dots$. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. **(5 б.)**