ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение
высшего и профессионального образования
«РОСТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

В. Д. Кряквин, Е. А. Максименко

Квадратичные формы

Часть I. Приведение к каноническому виду

Методические указания
для студентов 1, 2 курсов факультета
математики, механики и компьютерных наук

Ростов-на-Дону
2006 г.

Аннотация

В данных методических указаниях рассматриваются вещественные билинейные и квадратичные формы, а также базовые соотношения между ними. Основное внимание уделяется приведению квадратичных форм к каноническому и нормальному виду.

Печатается по решению кафедры алгебры и дискретной математики факультета математики, механики и компьютерных наук РГУ.

Протокол № 1 от 11.09.2006 г.

Введение

В этих методических указаниях изложены простейшие свойства билинейных и квадратичных форм, определённых на конечномерном действительном линейном пространстве. По традиции, сложившейся на механико-математическом факультете РГУ, данная тема изучается в конце второго или начале третьего семестра, перед теорией линейных операторов. Поэтому мы не показываем связь квадратичных форм с самосопряжёнными линейными операторами.

При составлении пособия были использованы книги и методические указания, перечисленные в списке литературы. Многие термины и обозначения взяты из книги [7].

Всюду будем предполагать, что L — ненулевое конечномерное векторное пространство над полем $\mathbb{R}$. Размерность пространства L будем всюду обозначать буквой n. Таким образом, $\dim L = n$, причём $1 \leqslant n < +\infty$.

Будем придерживаться следующих обозначений.

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$ — соответственно множества натуральных, целых и действительных чисел.

Если X, Y — непустые множества, f — отображение, действующее из X в Y, и Z — непустое подмножество X, то через $f|_Z$ будем обозначать сужение (ограничение) отображения f на множество Z. Таким образом, $f|_Z\colon Z \to Y$, $f|_Z(z) = f(z)$ для любого $z \in Z$.

Если X — множество, то через X^2 или $X \times X$ будем обозначать декартово произведение множества X на себя, то есть множество всех упорядоченных пар вида (x, y), где $x, y \in X$.

Для любых $a, b \in \mathbb{Z}$, таких что $a \leqslant b$, обозначим через $\overline{a, b}$ множество $\{k \in \mathbb{Z} \mid a \leqslant k \leqslant b\}$. Например, $\overline{2, 5} = \{2, 3, 4, 5\}$.

Если $\mathbf{x} \in L$ и $e = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ — базис в L, то через $\mathbf{x}_e$ будем обозначать координатный вектор-столбец вектора $\mathbf{x}$ в базисе e. Авторы уверены, что читатели помнят о том, что

$$\mathbf{x}_e = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\tau \;\Leftrightarrow\; \mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n.$$

Если $e = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ и $u = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ — базисы в L, то через $P_{e\to u}$ будем обозначать матрицу перехода от базиса e к базису u. Напомним, что эта матрица составлена из координатных столбцов векторов $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ в базисе e (см. [7], § 1.4).

Если S — система векторов в L, то через $\ell(S)$ будем обозначать линейную оболочку S.

$M_n(\mathbb{R})$ — множество квадратных матриц порядка n с элементами из $\mathbb{R}$.

Если $A \in M_n(\mathbb{R})$, то A^τ — матрица, транспонированная к A, $\mathrm{r}(A)$ — ранг и $|A|$ — определитель матрицы A.

Если $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, то через $\mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ будем обозначать диагональную матрицу порядка n, у которой (i, i)-й элемент равен α_i для каждого $i \in \overline{1, n}$. Таким образом,

$$\mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

В конце доказательств теорем, лемм и следствий будем ставить знак $\square$.

§ 1. Билинейные формы

Определение 1.1. Отображение $B\colon L \times L \to \mathbb{R}$ называют *билинейной формой* (или *билинейным функционалом*) на L, если для любых векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in L$ и любых скаляров $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ справедливы равенства

$$B(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \alpha B(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \beta B(\mathbf{y}, \mathbf{z}), \tag{1.1}$$
$$B(\mathbf{x}, \alpha\mathbf{y} + \beta\mathbf{z}) = \alpha B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \beta B(\mathbf{x}, \mathbf{z}). \tag{1.2}$$

Таким образом, билинейная форма есть вещественнозначная функция двух векторных аргументов, линейная по каждому из них.

Теорема 1.1. *Пусть $B\colon L \times L \to \mathbb{R}$. Тогда условие* (1.1) *равносильно системе из двух условий:*

(1) *$B(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z}) = B(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + B(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in L$ (аддитивность по первому аргументу);*

(2) *$B(\alpha\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \alpha B(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L$ и любого $\alpha \in \mathbb{R}$ (однородность по первому аргументу).*

Аналогично, условие (1.2) *равносильно системе из двух условий: аддитивности по второму аргументу и однородности по второму аргументу.*

Доказательство. Из условия (1.1) при $\alpha = \beta = 1$ получается аддитивность по первому аргументу, а при $\mathbf{y} = 0$ (или $\beta = 0$) получается однородность по первому аргументу.

Докажем, что из условий (1) и (2) следует (1.1). Чтобы преобразовать выражение $B(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y},\mathbf{z})$, сначала воспользуемся аддитивностью по первому аргументу:

$$B(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y},\mathbf{z}) = B(\alpha\mathbf{x},\mathbf{z}) + B(\beta\mathbf{y},\mathbf{z}),$$

а затем в каждом из двух слагаемых воспользуемся однородностью по первому аргументу:

$$B(\alpha\mathbf{x},\mathbf{z}) + B(\beta\mathbf{y},\mathbf{z}) = \alpha B(\mathbf{x},\mathbf{z}) + \beta B(\mathbf{y},\mathbf{z}).$$

В итоге получаем (1.1). □

Формулы (1.1) и (1.2) легко распространить на случай любого конечного числа слагаемых. Приведём только формулировку утверждения (доказательство легко провести методом математической индукции). Если B — билинейная форма на L, $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_m \in L$, $\mathbf{y}\in L$ и $\alpha_1,\ldots,\alpha_m \in \mathbb{R}$ для $m\in\mathbb{N}$, то

$$B\left(\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\mathbf{x}_k,\mathbf{y}\right) = \sum_{k=1}^{m}\alpha_k B(\mathbf{x}_k,\mathbf{y}),$$

$$B\left(\mathbf{y},\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\mathbf{x}_k\right) = \sum_{k=1}^{m}\alpha_k B(\mathbf{y},\mathbf{x}_k).$$

Определение 1.2. Пусть B — билинейная форма на L, $e=(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)$ — базис в L. *Матрицей билинейной формы B в базисе e* называют квадратную матрицу B_e порядка n, составленную из элементов $b_{i,j}=B(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j)$.

Таким образом,

$$B_e = (B(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j))_{i,j=1}^{n} = \begin{pmatrix} B(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1) & \ldots & B(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B(\mathbf{e}_n,\mathbf{e}_1) & \ldots & B(\mathbf{e}_n,\mathbf{e}_n) \end{pmatrix}.$$

В следующей теореме указаны представления билинейной формы через её матрицу и координаты векторов-аргументов.

Теорема 1.2. *Пусть B — билинейная форма на L, $e=(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)$ — базис в L, $b_{i,j}=B(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j)$ для любых $i,j\in\overline{1,n}$. Тогда для любых векторов $\mathbf{x},\mathbf{y}\in L$ выполняются соотношения:*

$$B(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{x}_e^{\tau} B_e \mathbf{y}_e, \tag{1.3}$$

$$B(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{i,j}\xi_i\eta_j, \tag{1.4}$$

где $\mathbf{x}_e = (\xi_1, \ldots, \xi_n)^\tau$ *и* $\mathbf{y}_e = (\eta_1, \ldots, \eta_n)^\tau$ *— координатные столбцы в базисе* e *векторов* $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$ *соответственно.*

Замечание. В дальнейшем правую часть равенства (1.3) будем называть *матричным представлением* или *матричной записью* квадратичной формы B, а правую часть (1.4) — *координатным представлением* или *координатной записью.*

Доказательство. Сначала докажем (1.4). Подставим $\mathbf{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i \mathbf{e}_i$ в левую часть (1.4) и воспользуемся линейностью B по первому аргументу:

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = B\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i \mathbf{e}_i, \mathbf{y}\right) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i B(\mathbf{e}_i, \mathbf{y}).$$

Теперь подставим $\mathbf{y} = \sum\limits_{j=1}^{n} \eta_j \mathbf{e}_j$ и воспользуемся линейностью по второму аргументу:

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i B\left(\mathbf{e}_i,\ \sum_{j=1}^{n} \eta_j \mathbf{e}_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\ \xi_i \cdot \sum_{j=1}^{n} \eta_j B(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j).$$

Внесём множитель ξ_i во внутреннюю сумму и поменяем порядок сомножителей:

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \xi_i \eta_j B(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{i,j} \xi_i \eta_j.$$

Формула (1.4) доказана.

Теперь покажем, что правая часть формулы (1.3) равна правой части формулы (1.4). Сначала рассмотрим произведение $\mathbf{a} = B_e \mathbf{y}_e$. Это произведение имеет размеры $n \times 1$, т. е. является вектором-столбцом. Найдём i-й элемент вектора $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)^\tau$:

$$a_i = \sum_{j=1}^{n} b_{i,j} \eta_j \qquad (i \in \overline{1, n}).$$

Теперь рассмотрим произведение $\mathbf{x}_e^\tau \mathbf{a}$. Это число (матрица размера 1×1), равное

$$\mathbf{x}_e^\tau \mathbf{a} = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ \ldots \\ a_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i a_i = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \left(\sum_{j=1}^{n} b_{i,j} \eta_j\right).$$

Внесём множитель ξ_i во внутреннюю сумму:

$$\mathbf{x}_e^\tau B_e \mathbf{y}_e = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{i,j} \xi_i \eta_j.$$

Формула (1.3) доказана. $\square$

Покажем теперь, что при фиксированном базисе e каждой матрице A из $M_n(\mathbb{R})$ соответствует такая билинейная форма B, что $B_e = A$. Подсказкой для построения билинейной формы B служит формула (1.3).

Теорема 1.3. *Пусть e — базис в L, $A \in M_n(\mathbb{R})$. Тогда отображение $B\colon L \times L \to \mathbb{R}$, действующее по правилу*

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}_e^\tau A \mathbf{y}_e \qquad (\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L),$$

есть билинейная форма на L, причём $B_e = A$.

Доказательство. Билинейность отображения B следует из свойств умножения матриц. Проверим, например, линейность по первому аргументу:

$$\begin{aligned} B(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}, \mathbf{z}) = (\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y})_e^\tau A \mathbf{z}_e = (\alpha\mathbf{x}_e^\tau + \beta\mathbf{y}_e^\tau) A \mathbf{z}_e = \\ = \alpha\mathbf{x}_e^\tau A \mathbf{z}_e + \beta\mathbf{y}_e^\tau A \mathbf{z}_e = \alpha B(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \beta B(\mathbf{y}, \mathbf{z}). \end{aligned}$$

Линейность по второму аргументу проверяется аналогично.

Покажем, что $B_e = A$. Напомним, что $r \in \overline{1,n}$ базисный вектор $\mathbf{e}_r$ имеет в базисе e координатный столбец $(0, \ldots, 1, \ldots, 0)^\tau$, где единица стоит на r-м месте. С помощью символа Кронекера, который определяется правилом

$$\delta_{r,s} = \begin{cases} 1, & r = s; \\ 0, & r \neq s, \end{cases} \qquad (r, s \in \mathbb{Z}),$$

координатный столбец $(\mathbf{e}_r)_e$ можно записать так:

$$(\mathbf{e}_r)_e = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{r-1}, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-r})^\tau = (\delta_{r,1}, \ldots, \delta_{r,r}, \ldots, \delta_{r,n})^\tau.$$

Пусть $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$. Тогда для любых $r, s \in \overline{1,n}$ выполняются равенства:

$$B(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_s) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \delta_{r,i} \delta_{s,j} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \delta_{r,i} \sum_{j=1}^{n} \delta_{s,j} a_{i,j}.$$

Рассмотрим внутреннюю сумму $\sum\limits_{j=1}^{n} \delta_{s,j} a_{i,j}$. Если $j \neq s$, то $\delta_{s,j} = 0$. Поэтому все $n-1$ слагаемых при $j \neq s$ равны нулю. Остаётся лишь слагаемое $a_{i,s}$ при $j = s$. Следовательно, $B(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_s) = \sum\limits_{i=1}^{n} \delta_{r,i} a_{i,s}$. Если $i \neq r$, то $\delta_{r,i} = 0$. Поэтому из последней суммы остаётся лишь слагаемое, в котором $i = r$. Получили равенство $B(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_s) = a_{r,s}$. Поскольку индексы r, s были выбраны произвольно из $\overline{1, n}$, то $B_e = A$. □

Следствие 1.1. *Пусть e — базис в L. Отображение, которое действует из множества всех билинейных форм на L во множество $M_n(\mathbb{R})$ всех квадратных матриц порядка n, сопоставляя каждой билинейной форме B на L её матрицу B_e в базисе e, биективно.*

Доказательство. В теореме 1.3 доказана сюръективность этого отображения: для любой матрицы $A \in M_n(\mathbb{R})$ построена такая билинейная форма B, что $B_e = A$.

Проверим инъективность. Пусть B_1 и B_2 — билинейные формы на L, матрицы которых в базисе e совпадают: $(B_1)_e = (B_2)_e$. Но тогда из формулы (1.3) следует, что для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L$

$$B_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}_e^\tau (B_1)_e \mathbf{y}_e = \mathbf{x}_e^\tau (B_2)_e \mathbf{y}_e = B_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Таким образом, $B_1 = B_2$. □

Напомним, что при переходе от базиса e к базису u координаты вектора преобразуются по следующей формуле:

$$\mathbf{x}_e = P_{e \to u} \mathbf{x}_u. \tag{1.5}$$

Теперь найдём закон, по которому преобразуется матрица билинейной формы при смене базиса.

Теорема 1.4. *Пусть B — билинейная форма на L, e и u — базисы в L. Тогда*

$$B_u = P_{e \to u}^\tau B_e P_{e \to u}. \tag{1.6}$$

Доказательство. Выберем произвольно $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L$. Преобразуем выражение $B(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, пользуясь формулами (1.3) и (1.5):

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}_e^\tau B_e \mathbf{y}_e = (P_{e \to u} \mathbf{x}_u)^\tau B_e (P_{e \to u} \mathbf{y}_u).$$

По формуле транспонирования произведения матриц, $(P_{e\to u}\mathbf{x}_u)^\tau = \mathbf{x}_u^\tau P_{e\to u}^\tau$. Таким образом,

$$B(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{x}_u^\tau (P_{e\to u}^\tau B_e P_{e\to u})\mathbf{y}_u$$

для любых $\mathbf{x},\mathbf{y}\in L$. По теореме 1.3 такое представление единственно. Значит, $B_u = P_{e\to u}^\tau B_e P_{e\to u}$. $\square$

Следствие 1.2. *Ранг матрицы билинейной формы не зависит от выбора базиса.*

Доказательство. Утверждение вытекает из формулы (1.6), обратимости матриц перехода и известного свойства ранга: ранг матрицы не меняется при её умножении слева и (или) справа на обратимую матрицу. $\square$

Следствие 1.2 делает корректным следующее определение.

Определение 1.3. *Рангом* билинейной формы называют ранг её матрицы в каком-нибудь базисе. Ранг билинейной формы B обозначают через $\mathrm{r}(B)$ (пишут также r_B, $\mathrm{rank}(B)$ и $\mathrm{rk}(B)$).

Отметим простое утверждение о сужении билинейной формы на подпространство.

Теорема 1.5. *Пусть B — билинейная форма на L, L_0 — подпространство L. Тогда отображение $R = B|_{L_0\times L_0}$, действующее по формуле*

$$R(\mathbf{x},\mathbf{y}) = B(\mathbf{x},\mathbf{y}) \qquad (\mathbf{x},\mathbf{y}\in L_0),$$

является билинейной формой на L_0.

Доказательство. По условию, соотношения (1.1) и (1.2) выполняются для любых $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in L$ и любых $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. В частности, они выполняются для любых $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in L_0$ и любых $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. $\square$

Определение 1.4. Билинейную форму B на L называют *симметричной* (или *симметрической*), если $B(\mathbf{y},\mathbf{x}) = B(\mathbf{x},\mathbf{y})$ для любых $\mathbf{x},\mathbf{y}\in L$. Билинейную форму B на L называют *антисимметричной* (или *антисимметрической*), если $B(\mathbf{y},\mathbf{x}) = -B(\mathbf{x},\mathbf{y})$ для любых $\mathbf{x},\mathbf{y}\in L$.

Антисимметричность называют также *кососимметричностью*. Приведём простые критерии симметричности и антисимметричности билинейной формы в терминах её матрицы.

Определение 1.5. Пусть $A \in M_n(\mathbb{R})$, $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$. Матрицу A называют *симметричной* (или *симметрической*), если $A = A^\tau$, т. е. для любых $i, j \in \overline{1,n}$ выполняется равенство $a_{i,j} = a_{j,i}$. Матрица A называется *антисимметричной* (или *кососимметричной*), если $A = -A^\tau$, т. е. для любых $i, j \in \overline{1,n}$ выполняется равенство $a_{i,j} = -a_{j,i}$.

Отметим, что в антисимметричной вещественной матрице все диагональные элементы нулевые: при любом $i \in \overline{1,n}$ из $a_{i,i} = -a_{i,i}$ следует, что $a_{i,i} = 0$.

Теорема 1.6. *Билинейная форма B симметрична (соотв. антисимметрична) тогда и только тогда, когда симметрична (соотв. антисимметрична) её матрица в некотором (и тогда в любом) базисе e.*

Доказательство. Докажем лишь критерий симметричности билинейной формы, так как рассуждения для антисимметричности аналогичны и отличаются лишь выставлением противоположного знака в соответствующем месте. Если билинейная форма B симметрична, то для любого базиса $e = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ и любых индексов $i, j \in \overline{1,n}$ имеем $B(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i) = B(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$, т. е. по определению 1.2, $b_{i,j} = b_{j,i}$. Следовательно, $B_e^\tau = B_e$.

Обратно, пусть в некотором базисе e выполняется равенство $B_e^\tau = B_e$. Тогда для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L$

$$B(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \mathbf{y}_e^\tau B_e \mathbf{x}_e = (\mathbf{y}_e^\tau B_e \mathbf{x}_e)^\tau = \mathbf{x}_e^\tau B_e^\tau \mathbf{y}_e = \mathbf{x}_e^\tau B_e \mathbf{y}_e = B(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Здесь использован тот факт, что $\mathbf{y}_e^\tau B_e \mathbf{x}_e$ есть матрица размера 1×1 (т. е. число), которая при транспонировании не меняется. $\square$

Сумма билинейных форм и произведение билинейной формы на число определяются так же, как и для обычных функций:

Определение 1.6. Если B_1 и B_2 — билинейные формы на L, то их *суммой* называют отображение $B_1 + B_2$, действующее из $L \times L$ в $\mathbb{R}$ по правилу

$$(B_1 + B_2)(x, y) = B_1(x, y) + B_2(x, y) \qquad (x, y \in L).$$

Если B — билинейная форма на L, $\alpha \in \mathbb{R}$, то произведением α на B называют отображение αB, действующее из $L \times L$ в $\mathbb{R}$ по правилу

$$(\alpha B)(x, y) = \alpha B(x, y) \qquad (x, y \in L).$$

Легко проверить, что отображения $B_1 + B_2$ и αB являются билинейными формами.

Упражнения для самостоятельного решения

Упражнение 1.1. Доказать, что если $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ и для любого $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ выполняется равенство $\mathbf{x}^\tau \mathbf{y} = 0$, то $\mathbf{x} = 0$. Аналогично, если $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ и для любого $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ выполняется равенство $\mathbf{x}^\tau \mathbf{y} = 0$, то $\mathbf{y} = 0$.

Упражнение 1.2. Пусть B — билинейная форма на L. *Левое ядро* и *правое ядро* билинейной формы B определяются следующими формулами:

$$\operatorname{Ker}_L B = \{\mathbf{x} \in L \mid \forall \mathbf{y} \in L \quad B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0\};$$
$$\operatorname{Ker}_R B = \{\mathbf{y} \in L \mid \forall \mathbf{x} \in L \quad B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0\}.$$

Проверить, что $\operatorname{Ker}_L B$ и $\operatorname{Ker}_R B$ — подпространства L. С помощью формулы (1.3) и результатов упражнения 1.1 доказать, что

$$\dim \operatorname{Ker}_L B = \dim \operatorname{Ker}_R B = \dim L - \mathrm{r}(B).$$

Упражнение 1.3. Показать, что множество билинейных форм на L с операциями сложения и умножения на число образует векторное пространство над полем $\mathbb{R}$. Найти размерность этого пространства.

Упражнение 1.4. Доказать, что симметричные билинейные формы на L образуют подпространство векторного пространства всех билинейных форм на L. Найти размерность этого подпространства. Аналогичное задание для антисимметричных билинейных форм.

Упражнение 1.5. Доказать, что любая билинейная форма представима, и притом единственным образом, в виде суммы симметричной и антисимметричной билинейных форм. Таким образом, пространство билинейных форм есть прямая сумма подпространства симметричных билинейных форм и подпространства антисимметричных билинейных форм.

Упражнение 1.6. Пусть $B\colon L \times L \to \mathbb{R}$ — отображение, линейное по первому аргументу. Доказать, что если отображение B симметрично (т. е. $B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = B(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L$) или антисимметрично (т. е. $B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -B(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L$), то оно линейно и по второму аргументу.

Упражнение 1.7. Пусть B — билинейная форма на L, матрица которой одинакова во всех базисах. Доказать, что $B = 0$.

§ 2. Квадратичные формы

Определение 2.1. Отображение $Q\colon L \to \mathbb{R}$ называют *квадратичной формой* на L, если существует такая симметричная билинейная форма B на L, что $Q(\mathbf{x}) = B(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ для любого $\mathbf{x} \in L$. При этом говорят, что Q — квадратичная форма, *ассоциированная* с билинейной формой B, а B — билинейная форма, *полярная* к квадратичной форме Q.

Таким образом, квадратичная форма получается из симметричной билинейной формы отождествлением аргументов. Иногда говорят, что квадратичная форма получается из симметричной билинейной формы с помощью сужения на диагональ $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. В следующей теореме мы покажем, что полярная билинейная форма однозначно восстанавливается по квадратичной форме.

Теорема 2.1. *Пусть B — симметричная билинейная форма на L, Q — ассоциированная с ней квадратичная форма. Тогда для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L$*

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}\big(Q(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - Q(\mathbf{x}) - Q(\mathbf{y})\big); \tag{2.1}$$

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4}\big(Q(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - Q(\mathbf{x} - \mathbf{y})\big). \tag{2.2}$$

Доказательство. Пользуясь билинейностью и симметричностью B, для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L$ получаем:

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = B(&\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) = \\ &= B(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + B(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + B(\mathbf{y}, \mathbf{y}) = \\ &= Q(\mathbf{x}) + Q(\mathbf{y}) + 2B(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \end{aligned}$$

Аналогично, $Q(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = Q(\mathbf{x}) + Q(\mathbf{y}) - 2B(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Отсюда сразу следуют равенства (2.1) и (2.2). □

Таким образом, каждой билинейной форме отвечает одна (ассоциированная с ней) квадратичная форма и наоборот, каждой квадратичной форме отвечает одна (полярная) билинейная форма. Это позволяет понятия, введённые для билинейных форм, перенести на квадратичные формы.

Определение 2.2. *Матрицей квадратичной формы Q в базисе e* называют матрицу её полярной билинейной формы в базисе e. Будем обозначать её через Q_e.

Из теоремы 1.6 следует, что матрица квадратичной формы симметрична: $Q_e^\tau = Q_e$.

Из теоремы 2.1, теорем предыдущего параграфа и определения квадратичной формы сразу получаем следующие утверждения.

Следствие 2.1. *Пусть Q — квадратичная форма на L, e — базис в L, $Q_e = (\alpha_{i,j})_{i,j=1}^n$. Тогда для любого вектора $\mathbf{x} \in L$, имеющего в базисе e координатный вектор-столбец $\mathbf{x}_e = (\xi_1, \ldots, \xi_n)^\tau$, справедливы равенства:*

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_e^\tau Q_e \mathbf{x}_e,$$
$$Q(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{i,j}\xi_i\xi_j. \tag{2.3}$$

Заметим, что выражение $\sum\limits_{i,j=1}^{n} \alpha_{i,j}\xi_i\xi_j$ есть однородный многочлен второй степени относительно переменных $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Традиционно однородные многочлены называют также *формами*. Отсюда и происходит термин «квадратичная форма». В дальнейшем $\xi_1, \ldots, \xi_n$ будем называть как координатами вектора, так и переменными квадратичной формы в зависимости от контекста.

Часто в координатном представлении квадратичной формы выделяют слагаемые, содержащие квадраты координат, а вместо двух равных слагаемых $\alpha_{i,j}\xi_i\xi_j$ и $\alpha_{j,i}\xi_j\xi_i$, где $i < j$, пишут их сумму $2\alpha_{i,j}\xi_i\xi_j$ (пользуясь тем, что $\alpha_{i,j} = \alpha_{j,i}$). После этого (2.3) принимает следующий вид:

$$Q(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,i}\xi_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} \alpha_{i,j}\xi_i\xi_j.$$

Используя краткую запись $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}$ для двойной суммы $\sum\limits_{i=1}^{n-1}\sum\limits_{j=i+1}^{n}$, получаем:

$$Q(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,i}\xi_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \alpha_{i,j}\xi_i\xi_j.$$

Пример 2.1. Пусть квадратичная форма Q в базисе $e = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ имеет матрицу

$$Q_e = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & -4 \\ 1 & -4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Тогда для любого вектора $\mathbf{x} \in L$, координатный столбец которого в базисе e равен $\mathbf{x}_e = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^\tau$, выполняются равенства:

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{x}) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) &\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & -4 \\ 1 & -4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \\ = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) &\begin{pmatrix} -2\xi_1 + 3\xi_2 + \xi_3 \\ 3\xi_1 + 5\xi_2 - 4\xi_3 \\ \xi_1 - 4\xi_2 + 7\xi_3 \end{pmatrix} = \\ = (-2\xi_1^2 + 3\xi_1\xi_2 + \xi_1\xi_3) &+ (3\xi_1\xi_2 + 5\xi_2^2 - 4\xi_2\xi_3) + (\xi_1\xi_3 - 4\xi_2\xi_3 + 7\xi_3^2). \end{aligned}$$

После упрощения

$$Q(\mathbf{x}) = -2\xi_1^2 + 5\xi_2^2 + 7\xi_3^2 + 6\xi_1\xi_2 + 2\xi_1\xi_3 - 8\xi_2\xi_3.$$

Пример 2.2. Пусть квадратичная форма Q имеет следующее координатное представление в базисе e:

$$Q(\mathbf{x}) = 3\xi_1^2 - 4\xi_2^2 + 5\xi_3^2 + 4\xi_1\xi_2 - 6\xi_1\xi_3 + 2\xi_2\xi_3.$$

Тогда

$$Q_e = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & 1 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Продолжим список утверждений, вытекающих из теорем предыдущего параграфа, определения 2.1 и теоремы 2.1.

Следствие 2.2. *Пусть e — базис в L, A — симметричная матрица из $M_n(\mathbb{R})$. Тогда отображение $Q\colon L \to \mathbb{R}$, действующее по правилу*

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_e^\tau A \mathbf{x}_e \qquad (\mathbf{x} \in L),$$

есть квадратичная форма на L, причём $Q_e = A$.

Следствие 2.3. *Пусть e — базис в L. Тогда отображение, которое действует из множества всех квадратичных форм на L во множество всех симметричных матриц из $M_n(\mathbb{R})$ и каждой квадратичной форме Q сопоставляет её матрицу Q_e в базисе e, является биекцией.*

Следствие 2.4. *Пусть Q — квадратичная форма на L, e и u — базисы в L. Тогда*

$$Q_u = P^{\tau}_{e\to u} Q_e P_{e\to u}. \qquad (2.4)$$

Следствие 2.5. *Ранг матрицы квадратичной формы не зависит от выбора базиса.*

Определение 2.3. *Рангом* (или *индексом инерции*) квадратичной формы Q называют ранг её полярной билинейной формы, т. е. ранг матрицы Q в каком-нибудь базисе. Ранг квадратичной формы Q будем обозначать через $\mathrm{r}(Q)$. Если $\mathrm{r}(Q) = n$, то квадратичную форму Q называют *невырожденной*, если $\mathrm{r}(Q) < n$, — *вырожденной*.

Определим линейные операции над квадратичными формами.

Определение 2.4. Если Q_1 и Q_2 — квадратичные формы на L, то их *суммой* называют отображение $Q_1 + Q_2$, действующее из L в $\mathbb{R}$ по правилу

$$(Q_1 + Q_2)(\mathbf{x}) = Q_1(\mathbf{x}) + Q_2(\mathbf{x}) \qquad (\mathbf{x} \in L).$$

Если Q — квадратичная форма на L, $\alpha \in \mathbb{R}$, то *произведением* α на Q называют отображение αQ, действующее из L в $\mathbb{R}$ по правилу

$$(\alpha Q)(\mathbf{x}) = \alpha Q(\mathbf{x}) \qquad (\mathbf{x} \in L).$$

Легко видеть, что сумма квадратичных форм и произведение квадратичной формы на число также являются квадратичными формами. Действительно, если B_1 и B_2 — симметричные билинейные формы, полярные к Q_1 и Q_2 соответственно, то

$$(Q_1 + Q_2)(\mathbf{x}) = Q_1(\mathbf{x}) + Q_2(\mathbf{x}) = B_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + B_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (B_1 + B_2)(\mathbf{x}, \mathbf{x}),$$

т. е. $Q_1 + Q_2$ — квадратичная форма, ассоциированная с симметричной билинейной формой $B_1 + B_2$. Рассуждение для αQ аналогично.

В заключение этого параграфа, отметим ещё утверждение о сужении квадратичной формы (оно сразу следует из 1.5).

Следствие 2.6. *Пусть Q — квадратичная форма на L, L_0 — подпространство L. Тогда отображение $R = Q|_{L_0}$, которое действует по правилу*

$$R(\mathbf{x}) = Q(\mathbf{x}) \qquad \forall \mathbf{x} \in L_0,$$

является квадратичной формой на L_0.

Упражнения для самостоятельного решения

Упражнение 2.1. Пусть B — билинейная форма на L, равная сумме билинейных форм B_1 и B_2, где B_1 симметрична, B_2 антисимметрична (см. упражнение 1.5). Доказать, что $B(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ — квадратичная форма на L, и найти для неё полярную билинейную форму.

Упражнение 2.2. Проверить, что квадратичные формы на L образуют векторное пространство над полем $\mathbb{R}$ (относительно операций из определения 2.4). Найти размерность этого пространства. Указание: см. упражнение 1.4.

Упражнение 2.3. Пусть Q — квадратичная форма на L. Доказать, что

$$Q(\alpha\mathbf{x}) = \alpha^2 Q(\mathbf{x}) \qquad (\mathbf{x} \in L,\ \alpha \in \mathbb{R}), \tag{2.5}$$

$$Q(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + Q(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 2(Q(\mathbf{x}) + Q(\mathbf{y})) \qquad (\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L). \tag{2.6}$$

Тождество (2.6) называют *тождеством параллелограмма.*

Упражнение 2.4. Доказать, что для любой квадратичной формы Q на L выполняется равенство $Q(0) = 0$.

Упражнение 2.5. Доказать, что отображение $Q\colon L \to \mathbb{R}$ является квадратичной формой на L тогда и только тогда, когда одновременно выполняются два условия:
(1) $Q(-\mathbf{x}) = Q(\mathbf{x})$ для любого $\mathbf{x} \in L$;
(2) отображение $B\colon L \times L \to \mathbb{R}$, определённое формулой (2.1), является билинейной формой на L.

Упражнение 2.6. Доказать, что если для отображения $Q\colon L \to \mathbb{R}$ выполняются тождества (2.5) и (2.6), то Q — квадратичная форма на L. (Указание: определить B с помощью формулы (2.1) или (2.2)).

§ 3. Приведение квадратичной формы к каноническому виду

Квадратичная форма в различных базисах, вообще говоря, имеет различные матрицы или, что то же самое, различные представления в координатах. Поэтому возникает задача поиска базиса, в котором квадратичная форма имела бы как можно более простой вид. Часто оказывается удобным, когда у квадратичной формы в некотором базисе все смешанные произведения координат имеют нулевые коэффициенты, т. е. её матрица в этом базисе диагональна.

Определение 3.1. Говорят, что квадратичная форма Q в базисе e имеет *канонический вид*, если её матрица в этом базисе диагональна, т. е.

$$Q_e = \operatorname{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n),$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — некоторые действительные числа. Это значит, что для любого вектора $\mathbf{x} \in L$ выполняется равенство

$$Q(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \xi_k^2,$$

где $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе e.

Частным случаем канонического вида является нормальный вид.

Определение 3.2. Канонический вид квадратичной формы Q в базисе e называется *нормальным*, если элементы её матрицы в этом базисе равны 1, -1 или 0.

Удобно, чтобы в матрице квадратичной формы, имеющей нормальный вид, на диагонали сначала располагались единицы, потом минус единицы и лишь затем нули.

Определение 3.3. Будем говорить, что квадратичная форма Q в базисе e имеет *строго нормальный вид*, если её матрица в этом базисе имеет следующую структуру:

$$Q_e = \operatorname{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{p}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{q}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-p-q}),$$

где $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$, $p + q \leqslant n$. В координатной форме это можно записать так:

$$Q(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{p} \xi_k^2 - \sum_{k=p+1}^{p+q} \xi_k^2, \qquad \text{где} \qquad \mathbf{x}_e = (\xi_1, \ldots, \xi_n)^{\tau}.$$

Определение 3.4. Базис, в котором квадратичная форма имеет канонический (нормальный) вид, называется каноническим (нормальным).

Заметим, что число ненулевых коэффициентов в каноническом и нормальном видах равно рангу квадратичной формы. Это сразу следует из определения 2.3 и того факта, что ранг диагональной матрицы равен числу её диагональных элементов, отличных от нуля. Таким образом, в определении 3.1 ранг квадратичной формы Q равен количеству таких индексов $i \in \overline{1,n}$, что $\alpha_i \neq 0$, а в определении 3.3 $\mathrm{r}(Q) = p + q$.

Напомним, что линейное невырожденное преобразование координат соответствует переходу к новому базису. А именно, справедлива следующая

Лемма 3.1. *Пусть* $e = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ *— базис в* L, $P = (p_{i,j})_{i,j=1}^n$ *— невырожденная матрица из* $M_n(\mathbb{R})$, $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *— координаты вектора* $\mathbf{x} \in L$ *в базисе* e. *Далее, пусть числа* $\eta_1, \ldots, \eta_n$ *определены как линейные комбинации координат* $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *с коэффициентами* $p_{i,j}$:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= p_{1,1}\xi_1 + \ldots + p_{1,n}\xi_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \eta_n &= p_{n,1}\xi_1 + \ldots + p_{n,n}\xi_n. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Тогда существует такой базис u *в* L, *что* $\eta_1, \ldots, \eta_n$ *— координаты вектора* $\mathbf{x}$ *в базисе* u.

Доказательство. По условию, матрица P невырожденная. Следовательно, для неё существует обратная матрица P^{-1}, элементы которой обозначим через $q_{i,j}$ $(i, j \in \overline{1,n})$. Определим векторы $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ через линейные комбинации векторов исходного базиса e:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= q_{1,1}\mathbf{e}_1 + \ldots + q_{n,1}\mathbf{e}_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{u}_n &= q_{1,n}\mathbf{e}_1 + \ldots + q_{n,n}\mathbf{e}_n. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Тогда координатные вектор-столбцы $(\mathbf{u}_1)_e, \ldots, (\mathbf{u}_n)_e$ образуют матрицу P^{-1}. Из невырожденности этой матрицы следует, что система координатных векторов $(\mathbf{u}_1)_e, \ldots, (\mathbf{u}_n)_e$ линейно независима. Следовательно, система векторов $u = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ в пространстве L также линейно независима. А так как число векторов в ней равно размерности пространства L, то u — базис в L. По определению матрицы перехода, $P_{e\to u} = P^{-1}$, поэтому $P_{u\to e} = P$. Следовательно, координатные столбцы вектора $\mathbf{x}$ в базисах e и u связаны равенством $\mathbf{x}_u = P_{u\to e}\mathbf{x}_e = P\mathbf{x}_e$, т. е. $\mathbf{x}_u = (\eta_1, \ldots, \eta_n)^\tau$. $\square$

Рассмотрим приведение квадратичной формы к каноническому виду *методом Лагранжа.* Этот метод основан на процедуре выделения полного квадрата и некоторых вспомогательных преобразованиях.

Для выделения полного квадрата будет полезна следующая формула:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 = a_1^2 + \ldots + a_n^2 + 2a_1a_2 + \ldots + 2a_1a_n + \\ + 2a_2a_3 + \ldots + 2a_2a_n + \ldots + 2a_{n-1}a_n.$$

Используя знаки суммы, эту формулу можно записать так:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} a_ia_j,$$

или так:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_ia_j.$$

Например, при $n = 3$ формула принимает следующий вид:

$$(a_1 + a_2 + a_3)^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + 2a_2a_3.$$

Теорема 3.1. *Для любой квадратичной формы существует базис, в котором эта квадратичная форма имеет канонический вид.*

Доказательство. Пусть в некотором базисе e квадратичная форма Q имеет вид

$$Q(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}\xi_i\xi_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}^2\xi_i^2 + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} 2a_{ij}\xi_i\xi_j, \tag{3.3}$$

где $\mathbf{x}_e = (\xi_1, \ldots, \xi_n)^\tau$. Нужно построить новый базис, в котором Q будет иметь канонический вид. Пользуясь леммой 3.1, вместо построения базиса будем совершать невырожденные преобразования координат.

Если все коэффициенты $a_{i,j}$ квадратичной формы Q нулевые, то Q уже имеет канонический вид в базисе e. Будем считать, что хотя бы один из коэффициентов $a_{i,j}$ ненулевой. Рассмотрим несколько случаев.

1-й случай: $a_{1,1} \neq 0$. В этом случае рассмотрим выражение

$$a_{1,1}\left(\xi_1 + \frac{a_{1,2}}{a_{1,1}}\xi_2 + \ldots + \frac{a_{1,n}}{a_{1,1}}\xi_n\right)^2.$$

Раскроем скобки:

$$a_{1,1}\xi_1^2 + 2a_{1,2}\xi_1\xi_2 + \ldots + 2a_{1,n}\xi_1\xi_n + \sum_{i=2}^{n} \frac{a_{1,i}^2}{a_{1,1}}\xi_i^2 + 2\sum_{2\leqslant i<j\leqslant n} \frac{a_{1,i}a_{1,j}}{a_{1,1}}\xi_i\xi_j.$$

Получились все слагаемые из (3.3), содержащие координату ξ_1, и ещё некоторые слагаемые, не содержащие ξ_1. Следовательно, Q можно записать в виде

$$Q(\mathbf{x}) = a_{1,1}\left(\xi_1 + \frac{a_{1,2}}{a_{1,1}}\xi_2 + \ldots + \frac{a_{1,n}}{a_{1,1}}\xi_n\right)^2 + Q_1(\mathbf{x}),$$

где Q_1 не зависит от ξ_1. Введём новые переменные $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$:

$$\begin{aligned} &\eta_1 = \xi_1 + \frac{a_{1,2}}{a_{1,1}}\xi_2 + \ldots + \frac{a_{1,n}}{a_{1,1}}\xi_n, \\ &\eta_k = \xi_k \quad \text{при} \quad k \in \overline{2, n}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Это преобразование переменных линейное и невырожденное. Последнее следует из того, что преобразование обратимо: переменные $\xi_1, \ldots, \xi_n$ можно выразить через $\eta_1, \ldots, \eta_n$:

$$\begin{aligned} &\xi_1 = \eta_1 - \frac{a_{1,2}}{a_{1,1}}\eta_2 - \ldots - \frac{a_{1,n}}{a_{1,1}}\eta_n, \\ &\xi_k = \eta_k \quad \text{при} \quad k \in \overline{2, n}. \end{aligned}$$

В новых переменных Q принимает вид

$$Q(\mathbf{x}) = a_{1,1}\eta_1^2 + Q_1(\mathbf{x}),$$

где Q_1 зависит только от координат $\eta_2, \ldots, \eta_n$.

2-й случай: $a_{1,2} \neq 0$, $a_{i,i} = 0$ для любого $i \in \overline{1, n}$. В этом случае введём новые переменные $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$:

$$\begin{aligned} &\zeta_1 = \frac{\xi_2 + \xi_1}{2}, \qquad \zeta_2 = \frac{\xi_2 - \xi_1}{2}, \\ &\zeta_k = \xi_k \quad \text{при} \quad k \in \overline{3, n}. \end{aligned}$$

Это преобразование невырожденное, так как $\xi_1, \ldots, \xi_n$ выражаются через $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$:

$$\begin{aligned} &\xi_1 = \zeta_1 - \zeta_2, \qquad \xi_2 = \zeta_1 + \zeta_2, \\ &\xi_k = \zeta_k \quad \text{при} \quad k \in \overline{3, n}. \end{aligned}$$

В новых переменных Q принимает вид

$$Q(\mathbf{x}) = a_{1,2}\zeta_1^2 - a_{1,2}\zeta_2^2 + \\ + \sum_{k=3}^{n}(a_{1,k} + a_{2,k})\zeta_1\zeta_k + \sum_{k=3}^{n}(a_{2,k} - a_{1,k})\zeta_2\zeta_k + \sum_{i,j=3}^{n} a_{i,j}\zeta_i\zeta_j.$$

Здесь уже при ζ_1^2 стоит ненулевой коэффициент, так что мы пришли к случаю 1.

Остальные случаи можно свести к случаю 1 или 2 с помощью перенумерации координат. Если $a_{1,1} = 0$ и $a_{k,k} \neq 0$ при некотором $k \in \overline{2,n}$, то можно сделать следующее преобразование координат:

$$\zeta_1 = \xi_k, \qquad \zeta_k = \xi_1, \qquad \xi_i = \zeta_i \quad \text{при} \quad i \in \overline{1,n},\ i \neq 1,\ i \neq k.$$

Любая перенумерация координат соответствует просто перестановке векторов базиса (в приведённом примере переставляются векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_k$) и поэтому является невырожденным преобразованием.

Если $a_{k,k} = 0$ при любом $k \in \overline{1,n}$ и $a_{i,j} \neq 0$ при некоторых $i, j \in \overline{1,n}$, $ij \neq 2$, то можно сделать следующее преобразование координат:

$$\zeta_1 = \xi_i, \qquad \zeta_2 = \xi_j, \qquad \zeta_i = \xi_1, \qquad \zeta_j = \xi_2$$

и $\xi_k = \zeta_k$ для $k \neq 1$, $k \neq 2$, $k \neq i$, $k \neq j$.

Итак, для первой переменной мы выделили полный квадрат и с помощью невырожденного линейного преобразования перешли от переменных $\xi_1, \ldots, \xi_n$ к переменным $\eta_1, \ldots, \eta_n$. В результате этого преобразования квадратичная форма Q принимает вид

$$Q(\mathbf{x}) = \alpha_1\eta_1^2 + Q_1(\mathbf{x}),$$

где $Q_1(x)$ зависит только от $\eta_2, \ldots, \eta_n$. На втором шаге выделяется полный квадрат из Q_1 по следующей координате, и т. д. Продолжая этот процесс, через конечное число шагов приведём Q к каноническому виду. $\square$

Следствие 3.1. *Для любой квадратичной формы существует базис, в котором эта квадратичная форма имеет строго нормальный вид.*

Доказательство. Для произвольной квадратичной формы Q, пользуясь теоремой 3.1, найдём такой базис u, в котором Q имеет канонический вид:

$$Q(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\eta_i^2.$$

Пусть p — число положительных элементов среди $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, q — число отрицательных, и $r = p + q$. С помощью перенумерации координат (которой соответствует такая же перенумерация векторов базиса) можно перейти к случаю, когда

$$\alpha_1 > 0,\ \dots,\ \alpha_p > 0, \qquad \alpha_{p+1} < 0,\ \dots,\ \alpha_r < 0, \qquad \alpha_{r+1} = \dots = \alpha_n = 0.$$

Сделаем преобразование координат (очевидно, невырожденное):

$$\begin{aligned} \eta_k &= \frac{1}{\sqrt{|\alpha_k|}}\,\zeta_k && \text{при} \quad k \in \overline{1, r}; \\ \eta_k &= \zeta_k && \text{при} \quad k \in \overline{r+1, n}. \end{aligned}$$

В новых координатах Q принимает строго нормальный вид:

$$Q(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k \cdot \frac{\zeta_k^2}{|\alpha_k|} = \sum_{k=1}^{p} \zeta_k^2 - \sum_{k=p+1}^{r} \zeta_k^2.$$

$\square$

Матричный метод приведения к каноническому виду

Введём в рассмотрение следующую невырожденную матрицу $E_{i,j}(\alpha)$:

$$E_{i,j}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & \text{\Large 0} & \\ & & 1 & \dots & \alpha & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & \text{\Large 0} & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Она получена из единичной матрицы заменой элемента, стоящего в i-й строке и j-м столбце, на число α. Если $i = j$, то необходимо, чтобы $\alpha \neq 0$.

Найдём произведение произвольной матрицы A на матрицу $E_{i,j}(\alpha)$ справа. При $i \neq j$ произведение $AE_{i,j}(\alpha)$ получается из матрицы A, если все столбцы, кроме j-го, оставить без изменения, а к j-му столбцу прибавить i-й столбец, умноженный на α. Если же $j = i$, то произведение $AE_{i,j}(\alpha)$ получается из матрицы A умножением j-го столбца на α.

Рассмотрим также произведение произвольной матрицы A на матрицу $E_{i,j}(\alpha)$ слева. При $i \neq j$ произведение $E_{i,j}(\alpha)^\tau A$ получается из матрицы A прибавлением к j-й строке i-строки, умноженной на α. При $i = j$ произведение $E_{i,j}(\alpha)^\tau A$ получается из матрицы A умножением j-й строки на α.

Матрица $E_{i,j}(\alpha)$ является невырожденной, поэтому может выступать в роли матрицы перехода. Так как преобразование матрицы квадратичной формы Q происходит по формуле $Q_u = P^\tau_{e\to u} Q_e P_{e\to u}$, то матрица $E^\tau_{i,j}(\alpha) Q_e E_{i,j}(\alpha)$ будет матрицей квадратичной формы в некотором новом базисе u.

Выбирая последовательно подходящие матрицы $E_{i,j}(\alpha)$, можно попытаться получить диагональную матрицу квадратичной формы, т. е. привести её к каноническому виду.

Вместо умножения справа на матрицу $E_{i,j}(\alpha)$ выполняют элементарное преобразование столбцов $C^j + \alpha C^i$ при $i \neq j$ или αC^j при $i = j$; вместо умножения слева на её транспонированную выполняют элементарное преобразование строк $C_j + \alpha C_i$ при $i \neq j$ или αC_j при $i = j$. Обратите внимание на то, что в этих преобразованиях одинаковы номера строк и столбцов. Такое преобразование будем называть согласованным элементарным преобразованием строк и столбцов.

Матричный метод приведения квадратичной формы к каноническому виду будет более подробно показан на примерах в следующем параграфе.

Упражнения для самостоятельного решения

Упражнение 3.1. Пусть квадратичная форма Q в базисе e имеет канонический вид, B — билинейная форма, полярная к Q. Записать B в координатной форме в базисе e.

Упражнение 3.2. Пусть $Q_e = (a_{i,j})^n_{i,j=1}$, причём $a_{1,2} \neq 0$ и $a_{i,i} = 0$ для любого $i \in \overline{1,n}$, так что

$$Q(\mathbf{x}) = 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{i,j} \xi_i \xi_j.$$

Это случай 2 из доказательства теоремы 3.1. Можно не сводить его к случаю

1, а сразу выделить два полных квадрата. Положим

$$\eta_1 = \sum_{k=1}^{n}(a_{1,k} + a_{2,k})\xi_k = a_{1,2}(\xi_1 + \xi_2) + \sum_{k=3}^{n}(a_{1,k} + a_{2,k})\xi_k, \tag{3.5}$$

$$\eta_2 = \sum_{k=1}^{n}(a_{1,k} - a_{2,k})\xi_k = a_{1,2}(\xi_2 - \xi_1) + \sum_{k=3}^{n}(a_{1,k} - a_{2,k})\xi_k, \tag{3.6}$$

$$\eta_k = \xi_k \quad \text{при} \quad k \in \overline{3, n}.$$

Показать, что это преобразование переменных невырожденное, и

$$Q(\mathbf{x}) = \frac{1}{2a_{1,2}}\,\eta_1^2 - \frac{1}{2a_{1,2}}\,\eta_2^2 + Q_2(\mathbf{x}),$$

где Q_2 зависит только от $\eta_3, \ldots, \eta_n$.

Упражнение 3.3. Проверить, что формула (3.4) записываются следующим образом с помощью частных производных, если считать квадратичные формы функциями от координат $\xi_1, \ldots, \xi_n$:

$$\eta_1 = \frac{1}{2a_{11}} \cdot \frac{\partial Q}{\partial \xi_1}. \tag{3.7}$$

Проверить также аналогичные формы записи для формул (3.5) и (3.6):

$$\eta_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial Q}{\partial \xi_1} + \frac{\partial Q}{\partial \xi_2}\right), \qquad \eta_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial Q}{\partial \xi_1} - \frac{\partial Q}{\partial \xi_2}\right). \tag{3.8}$$

Упражнение 3.4. Пусть $E_{s,t}$ — квадратная матрица порядка n, полученная из единичной матрицы E в результате перестановки строк с номерами s и t, где $s \neq t$ (такое преобразование матрицы иногда обозначают символом $C_s \leftrightarrow C_t$). Разложить матрицу $E_{s,t}$ в произведение нескольких матриц вида $E_{i,j}(\alpha)$. Другими словами, нужно представить преобразование вида $C_s \leftrightarrow C_t$ в виде композиции нескольких преобразований вида $C_j + \alpha C_i$ или αC_j.

§ 4. Примеры приведения к каноническому виду

Покажем на примерах, как приводить квадратичную форму к каноническому виду. Рассмотрим несколько способов решения.

В каждом примере дана координатная запись квадратичной формы Q в некотором базисе e. Нужно найти канонический вид квадратичной формы и приводящее к нему линейное невырожденное преобразование.

Координаты вектора $\mathbf{x}$ в исходном базисе будем обозначать $x_1, \ldots, x_n$; в других базисах — $y_1, \ldots, y_n$, $t_1, \ldots, t_n$ и т. п.

Пример 4.1. $Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 - 8x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 16x_2x_3.$

Решение. Воспользуемся методом Лагранжа. Сначала рассмотрим все слагаемые, содержащие x_1:

$$x^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3.$$

Здесь стоит квадрат первого слагаемого x_1, затем удвоенное произведение x_1 на $2x_2$ и минус удвоенное произведение x_1 на x_3. Чтобы получить эти слагаемые, нужно возвести в квадрат выражение

$$x_1 + 2x_2 - x_3.$$

Обратите внимание на то, что это выражение равно половине частной производной квадратичной формы по переменной x_1 (см. формулу (3.7) из упражнения 3.3); в общем случае нужно ещё делить на множитель перед x_1^2, но в этом примере он равен 1.

Вычислим отдельно квадрат этого выражения:

$$(x_1 + 2x_2 - x_3)^2 = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3.$$

Вычитая из квадратичной формы этот квадрат, получим

$$f(\mathbf{x}) - (x_1 + 2x_2 - x_3)^2 = -2x_2^2 - 9x_3^2 - 12x_2x_3. \tag{4.1}$$

Выпишем теперь все слагаемые из правой части (4.1), содержащие координату x_2, и выделим полный квадрат

$$-2x_2^2 - 12x_2x_3 = -2(x_2 + 3x_3)^2 + 18x_3^2. \tag{4.2}$$

Для того чтобы получить выражение $x_2 + 3x_3$, стоящее в (4.2) под квадратом, можно мысленно разделить правую часть (4.1) на коэффициент при x_2^2 и вычислить половину частной производной по x_2. Так как

$$-2(x_2 + 3x_3)^2 = -2x_2^2 - 12x_2x_3 - 18x_3^2,$$

то, вычитая последнее выражение из (4.1), получим

$$Q(\mathbf{x}) = (x_1 + 2x_2 - x_3)^2 - 2(x_2 + 3x_3)^2 + 9x_3^2.$$

Теперь можно сделать линейную невырожденную замену координат

$$y_1 = x_1 + 2x_2 - x_3, \qquad y_2 = x_2 + 3x_3, \qquad y_3 = x_3.$$

В новых координатах квадратичная форма будет иметь канонический вид:

$$Q(\mathbf{x}) = y_1^2 - 2y_2^2 + 9y_3^2.$$

Так как в каноническом виде присутствуют три ненулевых слагаемых, то ранг квадратичной формы равен трём: $\mathrm{r}(Q) = 3$. После линейной невырожденной замены координат

$$t_1 = y_1, \qquad t_2 = \sqrt{2}y_2, \qquad t_3 = 3y_3$$

получим строго нормальный вид:

$$Q(\mathbf{x}) = t_1^2 - t_2^2 + t_3^2,$$

где

$$t_1 = x_1 + 2x_2 - x_3, \qquad t_2 = \sqrt{2}(x_2 + 3x_3), \qquad t_3 = 3x_3.$$

□

Пример 4.2. $Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_1x_4 - 2x_3x_4.$

Решение. Для слагаемых

$$s = x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_1x_4,$$

содержащих x_1, нужно выделить полный квадрат. Это значит, что нужно найти такое выражение, квадрат которого был бы суммой s и слагаемых, не содержащих x_1. Таким выражением будет $x_1 + x_2 - x_3 + x_4$ (половина частной производной квадратичной формы по переменной x_1, поделённая на коэффициент при x_1^2). Тогда

$$(x_1 + x_2 - x_3 + x_4)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + \\ + 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 - 2x_3x_4.$$

Вычитая этот квадрат из квадратичной формы, получим

$$Q(\mathbf{x}) - (x_1 + x_2 - x_3 + x_4)^2 = 2x_2x_3 - 2x_2x_4. \tag{4.3}$$

После замены $y_1 = x_1 + x_2 - x_3 + x_4$ квадратичная форма по первой координате принимает нужную форму. Теперь можно перейти к выделению полного квадрата по следующей координате. Для этого нужно, чтобы имелся её квадрат с ненулевым коэффициентом. В нашем случае это не так. Для того, чтобы это исправить, сделаем замену

$$x_2 = y_2 + y_3, \qquad x_3 = y_2 - y_3, \qquad x_4 = y_4.$$

Тогда

$$Q(\mathbf{x}) - y_1^2 = 2y_2^2 - 2y_3^2 - 2y_2y_4 - 2y_3y_4.$$

Для слагаемых $2y_2^2 - 2y_2y_4$, содержащих y_2, выделим полный квадрат. Под квадратом будет стоять $y_2 - y_4/2$ (для проверки найдите половину частной производной квадратичной формы по переменной y_2, поделённой на коэффициент при y_2^2). Тогда

$$2(y_2 - \frac{1}{2}y_4)^2 = 2y_2^2 - 2y_2y_4 + \frac{1}{2}y_4^2.$$

Вычитая этот квадрат из квадратичной формы, получим

$$Q(\mathbf{x}) - y_1^2 - 2(y_2 - \frac{1}{2}y_4)^2 = -2y_3^2 - \frac{1}{2}y_4^2 - 2y_3y_4.$$

Так как

$$-2y_3^2 - \frac{1}{2}y_4^2 - 2y_3y_4 = -2(y_3 + \frac{1}{2}y_4)^2,$$

то после замены

$$z_1 = y_1,\ z_2 = y_2 - \frac{1}{2}y_4,\ z_3 = y_3 + \frac{1}{2}y_4,\ z_4 = y_4$$

получим канонический вид квадратичной формы

$$Q(\mathbf{x}) = z_1^2 + 2z_2^2 - 2z_3^2.$$

Для того, чтобы привести квадратичную форму к нормальному виду, нужно сделать ещё одну замену:

$$t_1 = z_1, \qquad t_2 = \sqrt{2}z_2, \qquad t_3 = \sqrt{2}z_3, \qquad t_4 = z_4.$$

Тогда
$$Q(\mathbf{x}) = t_1^2 + t_2^2 - t_3^2,$$
причём линейное невырожденное преобразование координат даётся равенствами
$$\begin{aligned} &t_1 = x_1 + x_2 - x_3 + x_4, && t_2 = \sqrt{2}(x_2 + x_3 - x_4)/2, \\ &t_3 = \sqrt{2}(x_2 - x_3 + x_4)/2, && t_4 = x_4. \end{aligned}$$
Ответ получен. Однако вернёмся снова к равенству (4.3). Если сделать замену
$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = y_1, && x_2 = y_2 + y_3, \\ &x_3 - x_4 = y_2 - y_3, && x_4 = y_4, \end{aligned}$$
которая приводит к линейному невырожденному преобразованию координат
$$\begin{aligned} &y_1 = x_1 + x_2 - x_3 + x_4, && y_2 = \tfrac{1}{2}(x_2 + x_3 - x_4), \\ &y_3 = \tfrac{1}{2}(x_2 - x_3 + x_4), && y_4 = x_4, \end{aligned}$$
то сразу получим канонический вид квадратичной формы. Подробнее эта замена переменных описана в решении примера 4.4. □

Пример 4.3. $Q(\mathbf{x}) = 6x_1x_3 + 4x_1x_4 - 3x_3^2 - 2x_3x_4 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4$.

Решение. Здесь коэффициент при квадрате первой координаты равен нулю. Но есть ненулевые коэффициенты при квадратах других координат. Удобно x_2 сделать первой координатой. Этого можно достичь с помощью линейного невырожденного преобразования координат
$$y_1 = x_2, \qquad y_2 = x_1, \qquad y_3 = x_3, \qquad y_4 = x_4.$$
Тогда квадратичная форма примет вид
$$Q(\mathbf{x}) = y_1^2 - 3y_3^2 + 2y_1y_2 + 2y_1y_3 + 2y_1y_4 + 6y_2y_3 + 4y_2y_4 - 2y_3y_4.$$

Теперь можно взять сумму всех слагаемых, содержащих y_1:
$$y_1^2 + 2y_1y_2 + 2y_1y_3 + 2y_1y_4.$$
Выделяя полный квадрат, видим, что выражение, стоящее под квадратом, должно иметь вид $y_1 + y_2 + y_3 + y_4$. Оно, как обычно, равно половине частной производной квадратичной формы по y_1, поделённой на коэффициент при y_1^2. Тогда
$$\begin{aligned}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4)^2 = &y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 + 2y_1y_2 + 2y_1y_3 + 2y_1y_4 + \\ &+ 2y_2y_3 + 2y_2y_4 + 2y_3y_4.\end{aligned}$$

Вычитая этот квадрат из квадратичной формы, получим

$$Q(\mathbf{x}) - (y_1 + y_2 + y_3 + y_4)^2 = -y_2^2 - 4y_3^2 - y_4^2 + 4y_2y_3 + 2y_2y_4 - 4y_3y_4.$$

Чтобы выделить из правой части полный квадрат, выпишем все слагаемые, содержащие y_2:

$$-y_2^2 + 4y_2y_3 + 2y_2y_4$$

Видим, что в квадрат нужно возводить $y_2 - 2y_3 - y_4$. Тогда

$$-(y_2 - 2y_3 - y_4)^2 = -y_2^2 - 4y_3^2 - y_4^2 + 4y_2y_3 + 2y_2y_4 - 4y_3y_4$$

и, следовательно,

$$Q(\mathbf{x}) - (y_1 + y_2 + y_3 + y_4)^2 = -(y_2 - 2y_3 - y_4)^2.$$

Сделаем линейную невырожденную замену координат

$$z_1 = y_1 + y_2 + y_3 + y_4, \quad z_2 = y_2 - 2y_3 - y_4, \quad z_3 = y_3, \quad z_4 = y_4.$$

В новых координатах квадратичная форма имеет канонический вид

$$Q(\mathbf{x}) = z_1^2 - z_2^2.$$

Связь координат легко устанавливается:

$$z_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4, \quad z_2 = x_1 - 2x_3 - x_4, \quad z_3 = x_3, \quad z_4 = x_4.$$

Решение можно проверить подстановкой.

Проверку можно выполнить и по формуле (2.4) преобразования матрицы квадратичной формы при смене базиса. Пусть по условию квадратичная форма задана в базисе u. Тогда она в этом базисе имеет матрицу

$$Q_u = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если e — базис, в котором квадратичная форма имеет нормальный вид, то в этом базисе её матрица имеет вид

$$Q_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $\mathbf{x}_u = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ и $\mathbf{x}_e = (t_1, t_2, t_3, t_4)$, то из связи координат этих векторов и формулы $\mathbf{x}_e = P_{e\to u}\mathbf{x}_u$

$$P_{e\to u} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$Q_e P_{e\to u} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и

$$P^{\tau}_{e\to u} Q_e P_{e\to u} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Последняя матрица совпадает с Q_u. Это наблюдение и завершает проверку. □

Пример 4.4. $Q(\mathbf{x}) = 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 3x_1x_4 + 2x_2x_3 - 4x_2x_4 - x_3x_4$.

Решение. Квадратичная форма не содержит квадратов координат. Замена $x_1 = y_1 + y_2$, $x_2 = y_1 - y_2$ приводит к появлению таких квадратов. Однако есть и другой, достаточно эффективный, способ, описанный в упражнении 3.2. Воспользуемся им. Заметим, что имеется слагаемое $2x_1x_2$ с ненулевым коэффициентом. Поэтому сосредоточим свои усилия на координатах x_1, x_2. Найдём частные производные квадратичной формы по x_2 и x_1 и поделим их на удвоенный коэффициент при x_1x_2. Эти выражения будут равны соответственно $x_1 + x_3 - 2x_4$ и $x_2 - x_3 + 3x_4/2$. Их произведение, умноженное на коэффициент при x_1x_2, обозначим через s. Тогда

$$s = 2(x_1 + x_3 - 2x_4)(x_2 - x_3 + 3x_4/2)$$

и после раскрытия скобок

$$s = 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 3x_1x_4 + 2x_2x_3 - 2x_3^2 + 3x_3x_4 - 4x_2x_4 + 4x_3x_4 - 6x_4^2.$$

Тогда разность

$$Q(\mathbf{x}) - s = 2x_3^2 - 8x_3x_4 + 6x_4^2 \tag{4.4}$$

не содержит x_1, x_2. Теперь можно выделить полный квадрат по x_3 следующим образом. Найдём половину частной производной по x_3 от квадратичной формы в (4.4), поделенной на коэффициент при x_3^2. Получим $x_3 - 2x_4$. Тогда

$$Q(\mathbf{x}) - s - 2(x_3 - 2x_4)^2 = 2x_3^2 - 8x_3x_4 + 6x_4^2 - 2x_3^2 + 8x_3x_4 - 8x_4^2 = -2x_4^2.$$

Сделаем линейную невырожденную замену координат

$$\begin{array}{ll} y_1 + y_2 = x_1 + x_3 - 2x_4, & y_1 - y_2 = x_2 - x_3 + 3x_4/4, \\ y_3 = x_3 - 2x_4, & y_4 = x_4 \end{array}$$

или (складывая и вычитая два первых равенства)

$$\begin{array}{ll} y_1 = (2x_1 + 2x_2 - x_4)/4, & y_2 = (2x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 7x_4)/2, \\ y_3 = x_3 - 2x_4, & y_4 = x_4. \end{array}$$

В новых координатах квадратичная форма примет канонический вид

$$Q(\mathbf{x}) = s + 2(x_3 - 2x_4)^2 - 2x_4 = 2y_1^2 - 2y_2^2 + 2y_3^2 - 2y_4.$$

Замена $z_1 = \sqrt{2}y_1$, $z_2 = \sqrt{2}y_3$, $z_3 = \sqrt{2}y_2$, $z_4 = \sqrt{2}y_4$ приводит квадратичную форму к нормальному виду

$$Q(\mathbf{x}) = z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 - z_4.$$

□

Теперь покажем на примерах, как работает матричный метод приведения к каноническому виду.

Другое решение упражнения 4.1. Выполним согласованные элементарные преобразования строк и столбцов для матрицы квадратичной формы

$$Q_e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -8 \\ -1 & -8 & -8 \end{pmatrix}.$$

Так как матрицу нужно преобразовать к диагональной форме, будем выбирать ведущий элемент на главной диагонали. Удобно сначала выбрать ведущим элемент, стоящий в первой строке и первом столбце. Выполним следующие преобразования строк: $C_2 - 2C_1$, $C_3 + C_1$. Получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & -6 & -9 \end{pmatrix}$$

Теперь выполним такие же преобразования столбцов: $C^2 - 2C^1$, $C^3 + C^1$. В результате этих согласованных элементарных преобразований строк и столбцов матрица квадратичной формы примет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & -6 & -9 \end{pmatrix}.$$

Выберем теперь ведущий элемент во второй строке и втором столбце. Выполним согласованные элементарные преобразования строк и столбцов $C_3 - 3C_2$ и $C^3 - 3C^2$. Тогда

$$Q_u = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Матрица приведена к диагональной. Квадратичная форма имеет канонический вид

$$Q(\mathbf{x}) = z_1^2 - 2z_2^2 + 9z_3^2 \qquad (\mathbf{x}_u = (z_1, z_2, z_3)^\tau).$$

Вычислим теперь матрицу перехода и с её помощью легко найдём связь координат вектора x. Элементарным преобразованиям столбцов

$$C^2 - 2C^1, \quad C^3 + C^1 \quad \text{и} \quad C^3 - 3C^2$$

отвечают матрицы

$$E_{1,2}(-2) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad E_{1,3}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$E_{2,3}(-3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Эти матрицы строятся следующим образом. Если выполняется элементарное преобразование $C^j + \alpha C^i$, то элемент α нужно разместить в i-й строке и j-м столбце.

Произведение $E_{1,2}(-2)E_{1,3}(1)E_{2,3}(-3)$, равное

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и есть матрица перехода

$$P_{e\to u} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

А так как $\mathbf{x}_e = P_{e\to u}\mathbf{x}_u$, где $\mathbf{x}_e = (x_1, x_2, x_3)$ и $\mathbf{x}_u = (z_1, z_2, z_3)$, то

$$\begin{cases} x_1 = z_1 - 2z_2 + 7z_3, \\ x_2 = z_2 - 3z_3, \\ x_3 = z_3. \end{cases}$$

Матрицу перехода можно получить и более простым способом. Заметьте, что формулу

$$P_{e\to u} = E_{1,2}(-2)E_{1,3}(1)E_{2,3}(-3)$$

можно записать в виде

$$P_{e\to u} = EE_{1,2}(-2)E_{1,3}(1)E_{2,3}(-3).$$

Последняя формула показывает, что, выполнив над единичной матрицей E те же элементарные преобразования столбцов, что и над матрицей квадратичной формы, получим матрицу перехода $P_{e\to u}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[C^3 + C^1]{C^2 - 2C^1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[C^3 - 3C^2]{} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В результате получили ту же матрицу перехода. Вычисления, проводимые над матрицей квадратичной формы и единичной матрицей, можно объединить. Так как над ними проводятся одни и те же элементарные преобразования столбцов, то, записав первую матрицу над второй, эти преобразования можно проводить одновременно. Сравните следующие вычисления с предыдущими:

$$\left(\begin{array}{rrr} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -8 \\ -1 & -8 & -8 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[C_3+C_1]{C_2-2C_1} \left(\begin{array}{rrr} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & -6 & -9 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[C^3+C^1]{C^2-2C^1}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & -6 & -9 \\ \hline 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[C_3-3C_2]{} \left(\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 9 \\ \hline 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[C^3-3C^2]{} \left(\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \\ \hline 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Верхняя матрица — это матрица квадратичной формы в каноническом виде, а нижняя — это искомая матрица перехода. □

Решение примера 4.2 матричным способом. Для матрицы квадратичной формы

$$Q_e = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

выполним строчные элементарные преобразования $C_2 - C_1$, $C_3 + C_1$, $C_4 - C_1$, а затем соответствующие столбцовые элементарные преобразования $C^2 - C^1$, $C^3 + C^1$, $C^3 - C^1$. Тогда матрица квадратичной формы сначала примет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{затем} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Чтобы продолжить преобразования, нужно иметь ненулевые диагональные элементы матрицы (кроме первого, который уже использован при вычислениях). Для этого выполним вспомогательное согласованное элементарное преобразование строк и столбцов $C_2 + C_3$, $C^2 + C^3$. Тогда матрица квадратичной формы примет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Выполним теперь согласованные элементарные преобразования строк и столбцов $C_3 - \frac{1}{2}C_2$, $C_4 + \frac{1}{2}C_2$ и $C^3 - \frac{1}{2}C^2$, $C^4 + \frac{1}{2}C^2$. Тогда матрица квадратичной формы будет равна

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Осталось выполнить согласованное элементарное преобразование $C_4 + C_3$, $C^4 + C^3$. После него матрица становится диагональной:

$$Q_u = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Квадратичная форма в базисе u имеет канонический вид

$$Q(\mathbf{x}) = z_1^2 + 2z_2^2 - \frac{1}{2}z_3^2.$$

Построим теперь матрицу перехода и с её помощью найдём связь координат вектора $\mathbf{x}$. Для этого выполним те же элементарные преобразования столбцов над единичной матрицей:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[C^4 - C^1]{\substack{C^2 - C^1 \\ C^3 + C^1}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{C^2 + C^3}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[C^4 + \frac{1}{2}C^2]{C^3 - \frac{1}{2}C^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[C^4 + C^3]{}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Это и есть матрица перехода:

$$P_{e\to u} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из формулы $\mathbf{x}_e = P_{e\to u}\mathbf{x}_u$, где $\mathbf{x}_e = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ и $\mathbf{x}_u = (z_1, z_2, z_3, z_4)$, получаем зависимость между этими координатами:

$$\begin{cases} x_1 = z_1 + z_3, \\ x_2 = z_2 - \frac{1}{2}z_3, \\ x_3 = z_2 + \frac{1}{2}z_3 + z_4, \\ x_4 = z_4. \end{cases}$$

$\square$

Решение примера 4.3 матричным способом. Будем одновременно приводить матрицу квадратичной формы к диагональному виду и строить соответствующую матрицу перехода:

$$\left(\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_1 - C_2 \\ C_3 - C_2 \\ \longrightarrow \\ C_4 - C_2 \end{array} \left(\begin{array}{cccc} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -4 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} C^1 - C^2 \\ C^3 - C^2 \\ \longrightarrow \\ C^4 - C^2 \end{array}$$

$$
\longrightarrow
\left(\begin{array}{rrrr}
-1 & 0 & 2 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
2 & 0 & -4 & -2 \\
1 & 0 & -2 & -1 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
\xrightarrow[C_4 + C_1]{C_3 + 2C_1}
\left(\begin{array}{rrrr}
-1 & 0 & 2 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
\xrightarrow[C^4 + C^1]{C^3 + 2C^1}
$$

$$
\longrightarrow
\left(\begin{array}{rrrr}
-1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
1 & 0 & 2 & 1 \\
-1 & 1 & -3 & -2 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right).
$$

Матрица четвёртого порядка, стоящая сверху, является диагональной. Значит, это матрица квадратичной формы, имеющей канонический вид. В соответствии с алгоритмом матрица четвёртого порядка, стоящая снизу — это искомая матрица перехода. Поэтому

$$
Q(\mathbf{x}) = -z_1^2 + z_2^2, \qquad \text{где} \qquad
\begin{cases}
x_1 = z_1 + 2z_3 + z_4, \\
x_2 = -z_1 + z_2 - 3z_3 - 2z_4, \\
x_3 = z_3, \\
x_4 = z_4.
\end{cases}
$$

Иногда требуется выразить координаты z_i через x_j. Обычно это не вызывает затруднений. Здесь $z_3 = x_3$, $z_4 = x_4$, $z_1 = x_1 - 2z_3 - z_4$ и $z_1 = x_1 - 2x_3 - x_4$. Тогда $z_2 = x_2 + z_1 + 3z_3 + 2z_4$ и
$z_2 = x_2 + x_1 - 2x_3 - x_4 + 3x_3 + 2x_4 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$. □

Может случиться так, что в каноническом и нормальном виде квадратичной формы квадраты координат с ненулевыми коэффициентами не будут идти по порядку один за другим. Например, у квадратичной формы $Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_3^2$ между квадратами первой и третьей координатами стоит квадрат второй координаты с нулевым коэффициентом. Такого беспорядка можно избежать с помощью замены переменных, переставляющей координаты. Так, линейное невырожденное преобразование координат $y_1 = x_1$, $y_2 = x_3$, $y_3 = x_2$ приводит последнюю квадратичную форму к виду $Q(\mathbf{x}) = y_1^2 + 2y_2^2$.

Упражнения для самостоятельного решения

Упражнение 4.1. Найти канонический и нормальный вид следующих квадратичных форм и приводящее к нему линейное невырожденное преобразование (преобразование определено не однозначно):

a) $Q(\mathbf{x}) = x_1^2 - 2x_1x_2 - 6x_1x_3 - 7x_2^2 + 14x_2x_3 + 5x_3^2$;
b) $Q(\mathbf{x}) = 2x_1^2 - 4x_1x_2 + 12x_1x_3 + 14x_2^2 - 48x_2x_3 + 45x_3^2$;
c) $Q(\mathbf{x}) = -3x_1^2 - 6x_1x_2 + 18x_1x_3 + x_2^2 + 30x_2x_3 - 16x_3^2$;
d) $Q(\mathbf{x}) = 2x_1^2 - 8x_1x_2 - 8x_1x_3 + 16x_2^2 + 24x_2x_3 + 11x_3^2$;
e) $Q(\mathbf{x}) = -x_1^2 + 2x_1x_2 - 6x_1x_3 - 19x_2^2 + 30x_2x_3 - 20x_3^2$;
f) $Q(\mathbf{x}) = x_1^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 - 6x_2x_3 - 3x_3^2$.

Упражнение 4.2. Найти нормальный вид следующих квадратичных форм и приводящее к нему линейное невырожденное преобразование (преобразование определено не однозначно):

a) $Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 4x_2^2 - 2x_2x_3 + 6x_2x_4 + x_3^2 - 4x_3x_4 + x_4^2$;
b) $Q(\mathbf{x}) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_1x_4 + 4x_2^2 - 2x_2x_3 - 8x_2x_4 + 3x_4^2$;
c) $Q(\mathbf{x}) = x_1x_2 - x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 - x_3x_4$;
d) $Q(\mathbf{x}) = 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 - 2x_3x_4$;
e) $Q(\mathbf{x}) = -x_1x_3 + x_1x_4 - x_2x_3 + x_2x_4$;
f) $Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_1x_4 + x_2^2 + 4x_2x_3 - 6x_2x_4 + 2x_3^2 - 6x_3x_4 + 5x_4^2$.

Ответы

4.1. a) $t_1^2 - 2t_2^2 - 2t_3^2$, $t_1 = x_1 - x_2 - 3x_3$, $t_2 = -2x_2 + x_3$, $t_3 = x_3$;

b) $2t_1^2 + 3t_2^2$, $t_1 = x_1 - x_2 + 3x_3$, $t_2 = 2x_2 - 3x_3$, $t_3 = x_3$;

c) $-3t_1^2 + t_2^2 + 2t_3^2$, $t_1 = x_1 + x_2 - 3x_3$, $t_2 = -2x_2 - 3x_3$, $t_3 = x_3$;

d) $2t_1^2 + 2t_2^2 + t_3^2$, $t_1 = x_1 - 2x_2 - 2x_3$, $t_2 = -2x_2 - x_3$, $t_3 = x_3$;

e) $-t_1^2 - 2t_2^2 - 3t_3^2$, $t_1 = x_1 - x_2 + 3x_3$, $t_2 = 3x_2 - 2x_3$, $t_3 = x_3$;

f) $t_1^2 - t_2^2$, $t_1 = x_1 - 3x_2 - x_3$, $t_2 = -3x_2 - 2x_3$, $t_3 = x_3$.

4.2. a) $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - y_4^2$, $y_1 = x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4$, $y_2 = (x_2 + x_3)/\sqrt{2}$, $y_3 = \sqrt{2}x_4$, $y_4 = (x_2 - x_3 - 2x_4)/\sqrt{2}$;

b) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - y_4^2$, $y_1 = x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4$, $y_2 = x_2 + x_3$, $y_3 = x_3 + x_4$, $y_4 = x_2$;

c) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - y_4^2$, $y_1 = (x_1 + x_2 + x_4)/2$, $y_2 = x_3 - x_4$, $y_3 = (x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4)/2$, $y_4 = x_4$;

d) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - y_4^2$, $y_1 = (x_1 + x_2 + 2x_4)/\sqrt{2}$, $y_2 = (2x_3 - x_4)/\sqrt{2}$, $y_3 = (x_1 - x_2 + 2x_3)/\sqrt{2}$, $y_4 = \sqrt{5}x_4/\sqrt{2}$;

e) $y_1^2 - y_2^2$, $y_1 = (-x_1 - x_2 + x_3 - x_4)/2$, $y_2 = (-x_1 - x_2 - x_3 + x_4)/2$, $y_3 = x_2$, $y_4 = x_4$;

f) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, $y_1 = x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4$, $y_2 = x_2 + x_3 - x_4$, $y_3 = x_2$, $y_4 = x_4$.

Литература

Учебники:

[1] *Беклемишев Д. В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: Учебник для вузов. — 10-е изд., испр. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 304 с.

[2] *Винберг Э. Б.* Курс алгебры. — М.: Факториал Пресс, 2001. — 544 с.

[3] *Гельфанд И. М.* Лекции по линейной алгебре. 5-е изд., исправленное. — М.: Добросвет, МЦНМО, 1998. — 320 с.

[4] *Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р.* Линейная алгебра и многомерная геометрия. — М.: Наука, 1974. — 544 с.

[5] *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1988. — 552 с.

[6] *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Линейная алгебра: Учебник для вузов. — 5-е изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. — 320 с.

[7] *Козак А. В., Пилиди В. С.* Линейная алгебра. — М.: Вузовская книга, 2001. — 216 с.

[8] *Кострикин А. И.* Введение в алгебру. Часть II. Линейная алгебра: Учебник для вузов. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2000. — 368 с.

Методические указания:

[9] *Дыбин В. Б.* Лекции по линейной алгебре. Часть II. Выпуск 4. Функционалы. — Ростов-на-Дону: УПЛ РГУ, 2000.

[10] *Козак А. В., Пилиди В. С.* Определители. — Ростов-на-Дону: УПЛ РГУ, 1984.

[11] *Козак А. В., Пилиди В. С.* Линейные пространства. Часть 1. Основные определения. — Ростов-на-Дону: УПЛ РГУ, 1985.

[12] *Козак А. В., Пилиди В. С.* Линейные пространства. Часть 2. Подпространства. Ранг матрицы. — Ростов-на-Дону: УПЛ РГУ, 1985.