ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Федеральное государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

В. Д. Кряквин, Е. А. Максименко

Квадратичные формы

Часть II. Знакоопределённость

Методические указания
для студентов 1, 2 курсов факультета
математики, механики и компьютерных наук

Ростов-на-Дону
2008 г.

Аннотация

Данные методические указания являются продолжением методических указаний «Квадратичные формы. Часть I. Приведение к каноническому виду». Рассмотрен закон инерции квадратичных форм, проведена их классификация на основе знакоопределённости, даны критерии знакоопределённости.

Печатается по решению кафедры алгебры и дискретной математики факультета математики, механики и компьютерных наук РГУ.

Протокол № 3 от 10.03.2008 г.

Во второй части методических указаний по теме «Квадратичные формы» будет продолжена нумерация параграфов первой части и будут использоваться обозначения, определения и утверждения из первой части.

§ 5. Индексы инерции и знакоопределённость

Квадратичная форма может иметь (и на самом деле имеет) нормальный или канонический вид в нескольких базисах. Покажем, что число положительных коэффициентов и число отрицательных коэффициентов в нормальном виде квадратичной формы не зависят от выбора базиса. Это утверждение традиционно называют *законом инерции квадратичных форм*:

Теорема 5.1. *Пусть квадратичная форма Q, определённая на векторном пространстве L, имеет в базисе е нормальный вид*

$$Q(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{p} \xi_k^2 - \sum_{k=p+1}^{p+q} \xi_k^2, \qquad \text{где} \qquad (\xi_1, \dots, \xi_n)^\tau = \mathbf{x}_e, \tag{5.1}$$

а в базисе и квадратичная форма Q имеет нормальный вид

$$Q(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{p'} \eta_k^2 - \sum_{k=p'+1}^{p'+q'} \eta_k^2, \qquad \text{где} \qquad (\eta_1, \dots, \eta_n)^\tau = \mathbf{x}_u. \tag{5.2}$$

Тогда $p = p'$ и $q = q'$.

Доказательство. Докажем сначала, что $p \leqslant p'$. Рассуждая от противного, предположим, что $p > p'$. Рассмотрим в векторном пространстве L подпространства L_1 и L_2, являющиеся следующими линейными оболочками:

$$L_1 = \ell(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p), \qquad L_2 = \ell(\mathbf{u}_{p'+1}, \dots, \mathbf{u}_n).$$

Так как подсистемы $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p$ и $\mathbf{u}_{p'+1}, \dots, \mathbf{u}_n$ линейно независимы, то

$$\dim L_1 = p, \qquad \dim L_2 = n - p'.$$

Напомним формулу, которая связывает размерности суммы и пересечения подпространств:

$$\dim(L_1 \cap L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 + L_2). \tag{5.3}$$

Так как $L_1 + L_2 \subset L$, то $\dim(L_1 + L_2) \leqslant \dim L = n$. Предположение $p > p'$ означает, что $\dim L_1 + \dim L_2 = n + p - p' > n$. Из формулы (5.3) следует, что $\dim(L_1 \cap L_2) > 0$, т. е. существует ненулевой вектор $\mathbf{x}_0$, принадлежащий каждому из подпространств L_1 и L_2. Тогда его можно разложить по базисам этих подпространств:

$$\mathbf{x}_0 = \sum_{k=1}^{p} \xi_k \mathbf{e}_k, \qquad \mathbf{x}_0 = \sum_{k=p'+1}^{n} \eta_k \mathbf{u}_k.$$

Вычислим значение квадратичной формы на этом векторе. По формуле (5.1), $Q(\mathbf{x}_0) = \sum\limits_{k=1}^{p} \xi_k^2 > 0$, а по формуле (5.2), $Q(\mathbf{x}_0) = -\sum\limits_{k=p'+1}^{p'+q'} \eta_k^2 \leqslant 0$. Полученное противоречие показывает, что предположение $p > p'$ неверно, а верно $p \leqslant p'$.

Аналогично, меняя местами базисы e и u, получаем неравенство $p' \leqslant p$. Из $p \leqslant p'$ и $p \leqslant p$ следует, что $p = p'$. Напомним, что

$$p + q = p' + q' = \mathrm{r}(Q), \tag{5.4}$$

где $\mathrm{r}(Q)$ — ранг квадратичной формы Q. Отсюда

$$q' = \mathrm{r}(Q) - p' = \mathrm{r}(Q) - p = q.$$

$\square$

Таким образом, мы доказали, что число положительных коэффициентов и число отрицательных коэффициентов в нормальном виде квадратичной формы одинаково для всех базисов, в которых квадратичная форма имеет нормальный вид. Поэтому следующее определение корректно.

Определение 5.1. Пусть Q — квадратичная форма на L, e — какой-нибудь базис, в котором Q имеет нормальный вид:

$$Q(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{p} \xi_k^2 - \sum_{k=p+1}^{p+q} \xi_k^2, \qquad \text{где} \qquad (\xi_1, \ldots, \xi_n)^\tau = \mathbf{x}_e.$$

Тогда число p называют *положительным индексом инерции квадратичной формы* Q, а число q называют *отрицательным индексом инерции квадратичной формы* Q. Будем обозначать их соответственно через $\mathrm{r}_+(Q)$ и $\mathrm{r}_-(Q)$.

В упражнении 5.2 показано, как можно описать числа $\mathrm{r}_+(Q)$ и $\mathrm{r}_-(Q)$ геометрически, не используя координатное представление.

Следствие 5.1. *Если в некотором базисе квадратичная форма имеет канонический вид, то число слагаемых с положительными коэффициентами равно $\mathrm{r}_+(Q)$, а число слагаемых с отрицательными коэффициентами равно $\mathrm{r}_-(Q)$.*

Доказательство. В доказательстве следствия 3.1 было показано, что от канонического вида квадратичной формы можно перейти к нормальному виду с помощью такого преобразования коорданат, при котором коэффициенты квадратичной формы лишь переставляются и умножаются на положительные числа. При этом количество положительных и отрицательных коэффициентов не изменяется. □

Из формулы (5.4) получаем связь между рангом и индексами инерции:

Следствие 5.2. *Пусть Q — квадратичная форма на L. Тогда*

$$\mathrm{r}(Q) = \mathrm{r}_+(Q) + \mathrm{r}_-(Q).$$

Величину $\mathrm{r}_+(Q) - \mathrm{r}_-(Q)$ называют *сигнатурой* квадратичной формы Q и обозначают через $\sigma(Q)$. Заметим, что числа $\mathrm{r}_+(Q)$ и $\mathrm{r}_-(Q)$ однозначно выражаются через $\mathrm{r}(Q)$ и $\sigma(Q)$:

$$\mathrm{r}_+(Q) = \frac{\mathrm{r}(Q) + \sigma(Q)}{2}, \qquad \mathrm{r}_-(Q) = \frac{\mathrm{r}(Q) - \sigma(Q)}{2}.$$

Легко видеть, что $Q(\mathbf{0}) = 0$ для любой квадратичной формы Q на L (см. упражнение 2.4). Поэтому для классификации вещественных квадратичных форм важно рассматривать их на ненулевых аргументах. В зависимости от знака $Q(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x} \in L \setminus \{\mathbf{0}\}$, используют следующие термины (в скобках приведены синонимы).

Определение 5.2. Вещественную квадратичную форму Q на L называют:

a) *строго положительной* (*положительно определённой*), если $Q(\mathbf{x}) > 0$ для любого $\mathbf{x} \in L \setminus \{\mathbf{0}\}$;

b) *строго отрицательной* (*отрицательно определённой*), если $Q(\mathbf{x}) < 0$ для любого $\mathbf{x} \in L \setminus \{\mathbf{0}\}$;

c) *нестрого положительной* (*неотрицательной, положительно полуопределённой*), если $Q(\mathbf{x}) \geqslant 0$ для любого $\mathbf{x} \in L \setminus \{\mathbf{0}\}$;

d) *нестрого отрицательной* (*неположительной*, *отрицательно полуопределённой*), если $Q(\mathbf{x}) \leqslant 0$ для любого $\mathbf{x} \in L \setminus \{\mathbf{0}\}$;

e) *знакопеременной* (*знаконеопределённой*), если существуют такие векторы $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L \setminus \{\mathbf{0}\}$, что $Q(\mathbf{x}) > 0$ и $Q(\mathbf{y}) < 0$.

Будем писать $Q > 0$, если квадратичная форма Q строго положительная; $Q < 0$, если Q строго отрицательная; $Q \geqslant 0$, если Q нестрого положительная; $Q \leqslant 0$, если Q нестрого отрицательная; $Q \gtrless 0$, если Q знакопеременная.

Отметим логические связи между этими понятиями. Условие $Q \gtrless 0$ равносильно тому, что неверно $Q \geqslant 0$ и неверно $Q \leqslant 0$. Условия $Q \geqslant 0$ и $Q \leqslant 0$ выполняются одновременно лишь для нулевой квадратичной формы ($Q = 0$). Из $Q > 0$ следует $Q \geqslant 0$, из $Q < 0$ следует $Q \leqslant 0$.

Иногда используют следующие специальные термины для случаев, когда $Q \geqslant 0$, но $Q \not> 0$, и $Q \leqslant 0$, но $Q \not< 0$.

Определение 5.3. Квадратичную форму Q на L называют *квазиположительной* (или *квазиположительно определённой*), если $Q(\mathbf{x}) \geqslant 0$ для любого $\mathbf{x} \in L \setminus \{\mathbf{0}\}$, причём существует такой вектор $\mathbf{x} \in L \setminus \{\mathbf{0}\}$, что $Q(\mathbf{x}) = 0$. Будем писать $Q \geqq 0$, если Q квазиположительна.

Квадратичную форму Q на L называют *квазиотрицательной* (или *квазиотрицательно определённой*), если $Q(\mathbf{x}) \leqslant 0$ для любого $\mathbf{x} \in L \setminus \{\mathbf{0}\}$, причём существует такой вектор $\mathbf{x} \in L \setminus \{\mathbf{0}\}$, что $Q(\mathbf{x}) = 0$. Будем писать $Q \leqq 0$, если Q квазиотрицательна.

Квазиположительные и квазиотрицательные квадратичные формы называют *квазизнакоопределёнными*.

На рисунке показана схема зависимостей между различными типами знакоопределённости. Класс нестрого положительных квадратичных форм разбивается на классы строго положительных и квазиположительных, а класс нестрого отрицательных квадратичных форм — на классы строго отрицательных и квазиотрицательных. Нулевая квадратичная форма $Q = 0$ одновременно удовлетворяет условиям $Q \geqslant 0$, $Q \leqslant 0$, $Q \geqq 0$ и $Q \leqq 0$, но не удовлетворяет условию $Q \gtrless 0$.

Следующая теорема даёт критерий принадлежности квадратичной формы тому или иному классу знакоопределённости в терминах индексов инерции.

Теорема 5.2. *Пусть Q — квадратичная форма на L. Тогда:*
(1) $Q > 0 \iff \mathrm{r}_+(Q) = \dim L$;
(2) $Q < 0 \iff \mathrm{r}_-(Q) = \dim L$;
(3) $Q \geqslant 0 \iff \mathrm{r}_-(Q) = 0$;
(4) $Q \leqslant 0 \iff \mathrm{r}_+(Q) = 0$;
(5) $Q \geqq 0 \iff \mathrm{r}_-(Q) = 0$ *и* $\mathrm{r}_+(Q) < \dim L$;
(6) $Q \leqq 0 \iff \mathrm{r}_+(Q) = 0$ *и* $\mathrm{r}_-(Q) < \dim L$;
(7) $Q \gtrless 0 \iff \mathrm{r}_+(Q) > 0$ *и* $\mathrm{r}_-(Q) > 0$.

Доказательство. Пусть e — какой-нибудь базис векторного пространства L, в котором квадратичная форма Q имеет нормальный вид:

$$Q(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \xi_k^2, \quad \text{где} \quad \varepsilon_k \in \{-1, 0, 1\}.$$

Докажем, например, равносильность (1). Пусть $Q > 0$. Тогда $Q(\mathbf{e}_k) > 0$ для каждого k из $\overline{1,n}$. С другой стороны, $(\mathbf{e}_k)_e = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, где единица стоит на k-м месте. Поэтому $Q(\mathbf{e}_k) = \varepsilon_k$. Следовательно, $\varepsilon_k = 1$ для всех k из $\overline{1,n}$. Это значит, что $\mathrm{r}_+(Q) = n$.

Обратно, пусть $\mathrm{r}_+(Q) = n$, т. е. $\varepsilon_k = 1$ для всех $k \in \overline{1,n}$. Тогда $Q(\mathbf{x}) = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k^2$ и $Q(\mathbf{x}) > 0$ для любого ненулевого вектора $\mathbf{x}$.

Равносильности (2)–(7) доказываются аналогично. □

В заключение параграфа приведём изображения некоторых поверхностей второго порядка в пространстве $\mathbb{R}^3$, уравнения которых содержат квадратичные формы.

На рисунках показаны графики функций вида $z = Q(x, y)$, где Q — квадратичная форма на $\mathbb{R}^2$:

На рисунках показаны примеры поверхностей, заданных уравнениями вида $Q(x, y, z) = 0$, где Q — квадратичная форма на $\mathbb{R}^3$:

На рисунках изображены некоторые поверхности, заданные уравнениями вида $Q(x, y, z) = 1$, где Q — квадратичная форма на $\mathbb{R}^3$:

Приводя эти иллюстрации, мы вольно или невольно используем понятия расстояния и угла, которые имеются в пространстве $\mathbb{R}^3$, но отсутствуют в абстрактном векторном пространстве.

Среди поверхностей второго порядка, заданных уравнениями указанных типов:

$$z = Q(x, y), \qquad Q(x, y, z) = 1, \qquad Q(x, y, z) = 0, \tag{5.5}$$

на рисунках показаны только те, в которых квадратичные формы Q имеют нормальный вид. Конечно, любую квадратичную форму в пространствах $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$ можно привести к нормальному виду, но соответствующие линейные преобразования могут исказить расстояния и углы. Например, из эллиптического параболоида $z = 9x^2 + y^2$ в результате растяжения в 3 раза по оси Ox получается круговой параболоид $z = x^2 + y^2$, показанный на рисунке .

Некоторые поверхности, заданные уравнениями указанных типов (5.5), на рисунках не показаны (например, $z = 0$ и $x^2 = 0$). Читателю рекомендуется перечислить и нарисовать все такие поверхности.

Упражнения для самостоятельного решения

Упражнение 5.1. Перечислить все квадратичные формы от двух и трёх переменных, имеющие нормальный вид. Найти число квадратичных форм от n переменных, имеющих в фиксированном базисе e нормальный вид.

Упражнение 5.2. Пусть Q — квадратичная форма на L. Говорят, что Q *строго положительна на подпространстве* M, если $Q|_M > 0$, т. е. $Q(\mathbf{x}) > 0$ для любого вектора $\mathbf{x}$ из $M \setminus \{\mathbf{0}\}$. Доказать, что $\mathrm{r}_+(Q)$ есть максимальная среди размерностей подпространств, на которых Q строго положительна. Сформулировать и доказать аналогичное утверждение для $\mathrm{r}_-(Q)$.

Определение 5.4. *Положительным* (соотв., *отрицательным*) *индексом инерции симметрической матрицы* A из $M_n(\mathbb{R})$ называют положительный (соотв., отрицательный) индекс инерции квадратичной формы $Q_A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, действующей по правилу:

$$Q_A(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\tau A \mathbf{x} \qquad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n).$$

Индексы инерции симметрической матрицы A обозначают через $\mathrm{r}_+(A)$ и $\mathrm{r}_-(A)$.

Упражнение 5.3. Пусть Q — квадратичная форма на L, e — базис в L, $A = Q_e$. Доказать, что $\mathrm{r}_+(Q) = \mathrm{r}_+(A)$, $\mathrm{r}_-(Q) = \mathrm{r}_-(A)$.

Упражнение 5.4. На множестве симметрических матриц порядка n с действительными элементами определим отношение $\cong$, полагая $A \cong B$, если существует такая невырожденная матрица P из $M_n(\mathbb{R})$, что $B = P^\tau A P$. Проверить, что $\cong$ есть отношение эквивалентности. Доказать, что следующие условия равносильны:

(a) $A \cong B$;

(b) существует такая квадратичная форма Q на L ($\dim L = n$) и такие базисы e и u в L, что $Q_e = A$ и $Q_u = B$;

(c) $\mathrm{r}_+(A) = \mathrm{r}_+(B)$ и $\mathrm{r}_-(A) = \mathrm{r}_-(B)$.

Упражнение 5.5. Доказать, что для квадратичных форм Q и R на L следующие условия равносильны (отношение $\cong$ определено в упражнении 5.4):

(a) $\mathrm{r}_+(Q) = \mathrm{r}_+(R)$ и $\mathrm{r}_-(Q) = \mathrm{r}_-(R)$;

(b) $\mathrm{r}(Q) = \mathrm{r}(R)$ и $\sigma(Q) = \sigma(R)$;

(c) существуют такие базисы e и u в L, что $Q_e = R_u$;

(d) $Q_e \cong R_e$ для некоторого базиса e в L;

(e) $Q_e \cong R_e$ для любого базиса e в L.

Эти условия определяют отношение эквивалентности на множестве всех квадратичных форм на L. Найти число классов эквивалентности (использовать результат упражнения 5.1).

§ 6. Критерии знакоопределённости

В предыдущем параграфе были доказаны критерии знакоопределённости, использующие индексы инерции. Во многих приложениях индексы инерции неизвестны, однако известна матрица квадратичной формы в некотором базисе. В этом параграфе установим критерии знакоопределённости квадратичной формы в терминах знаков главных и угловых миноров её матрицы.

Сначала введём некоторые обозначения и дадим определения главных и угловых миноров.

Определитель квадратной матрицы A будем обозначать через $\det A$ или $|A|$. Напомним, что если $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{n}$, то определитель матрицы A равен

$$\det A = \sum_{\varphi \in S_n} \operatorname{sgn}(\varphi)\, a_{1,\varphi(1)}(t)\, a_{2,\varphi(2)}(t) \cdot \ldots \cdot a_{n,\varphi(n)}(t),$$

где S_n — множество всех подстановок порядка n, $\operatorname{sgn}(\varphi)$ — сигнатура (знак) подстановки φ.

Если $A \in M_n(\mathbb{R})$, то через $A_{i_1,i_2,\ldots,i_k}^{j_1,j_2,\ldots,j_k}$ обозначим квадратную подматрицу матрицы A, расположенную на пересечении строк с номерами $i_1, \ldots, i_k$ и столбцов с номерами $j_1, \ldots, j_k$:

$$A_{i_1,i_2,\ldots,i_k}^{j_1,j_2,\ldots,j_k} = \begin{pmatrix} a_{i_1,j_1} & a_{i_1,j_2} & \ldots & a_{i_1,j_k} \\ a_{i_2,j_1} & a_{i_2,j_2} & \ldots & a_{i_2,j_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_k,j_1} & a_{i_k,j_2} & \ldots & a_{i_k,j_k} \end{pmatrix}.$$

Здесь предполагается, что $i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_k \in \overline{1,n}$, причём $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n$ и $1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_k \leqslant n$.

Напомним, что минором k-го порядка матрицы A называют определитель любой её квадратной подматрицы k-го порядка.

Определение 6.1. Пусть $A \in M_n(\mathbb{R})$. *Главным минором* k-го порядка матрицы A называют любой её минор, расположенный на пересечении k строк и k столбцов с одинаковыми номерами, т. е. любой минор вида $\det A^{i_1,i_2,\ldots,i_k}_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$, где $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n$.

Определение 6.2. Пусть $A \in M_n(\mathbb{R})$, $k \in \overline{1,n}$. *Угловым минором* k-го порядка матрицы A называют определитель $\det A^{1,2,\ldots,k}_{1,2,\ldots,k}$. Будем обозначать его через $\Delta_k(A)$.

Таким образом, любой угловой минор квадратной матрицы является главным минором.

Пример 6.1. Найдём все угловые и главные миноры матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Решение. Угловые миноры:

$$\Delta_1(A) = \det(1) = 1, \qquad \Delta_2(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3, \qquad \Delta_3(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0.$$

Главные миноры первого порядка:

$$\det A^1_1 = \Delta_1(A) = 1, \qquad \det A^2_2 = 5, \qquad \det A^3_3 = 9.$$

Главные миноры второго порядка:

$$\det A^{1,2}_{1,2} = \Delta_2(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3,$$

$$\det A^{1,3}_{1,3} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -12, \qquad \det A^{2,3}_{2,3} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -3.$$

Главный минор третьего порядка:

$$\det A^{1,2,3}_{1,2,3} = \Delta_3(A) = \det A = 0.$$

□

В дальнейшем нам понадобятся три леммы.

Лемма 6.1. *Знак определителя матрицы квадратичной формы не зависит от выбора базиса.*

Доказательство. Пусть Q — квадратичная форма на L, e и u — базисы в L. Тогда, как было отмечено в следствии 2.4,

$$Q_u = P^{\tau}_{e\to u} Q_e P_{e\to u}.$$

Вспомним свойства определителя:

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B, \qquad \det A^{\tau} = \det A$$

для любых матриц A и B из $M_n(\mathbb{C})$. Пользуясь этими свойствами, получаем:

$$\det Q_u = \det P^{\tau}_{e\to u} \cdot \det Q_e \cdot \det P_{e\to u} = (\det P_{e\to u})^2 \cdot \det Q_e.$$

Матрица перехода $P_{e\to u}$ невырожденная, поэтому её определитель отличен от нуля и $(\det P_{e\to u})^2 > 0$. Значит, определители матриц Q_u и Q_e имеют одинаковые знаки. □

Лемма 6.2. *Пусть Q — квадратичная форма на L, e — базис в L. Если $Q \geqslant 0$, то $\det Q_e \geqslant 0$. Если $Q > 0$, то $\det Q_e > 0$.*

Доказательство. Предположим, что $Q \geqslant 0$. Обозначим через u какой-нибудь базис, в котором Q имеет нормальный вид. По теореме 5.2, $\mathrm{r}_-(Q) = 0$. Поэтому матрица Q_u имеет следующий диагональный вид:

$$Q_u = \mathrm{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{r}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-r}).$$

Следовательно, $\det Q_u \geqslant 0$. По лемме 6.1, $\det Q_e$ имеет тот же знак, что и $\det Q_u$, т. е. $\det Q_e \geqslant 0$. В частности, если $Q > 0$, то $r = n$ по теореме 5.2, и Q_u является единичной матрицей n-го порядка: $Q_u = E_n$. В этом случае $\det Q_u = 1$ и $\det Q_e > 0$. □

Лемма 6.3. *Пусть Q — квадратичная форма на L, $e = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ — базис в L, A — матрица квадратичной формы Q в базисе e: $A = Q_e$. Далее, пусть $i_1, \ldots, i_k$ — возрастающая цепочка индексов: $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n$, система $\hat{e}$ состоит из векторов $\mathbf{e}_{i_1}, \ldots, \mathbf{e}_{i_k}$, L_0 — линейная оболочка, натянутая на эту систему: $L_0 = \ell(\hat{e})$, R — сужение квадратичной формы Q на подпространство L_0: $R = Q|_{L_0}$. Тогда*

$$R_{\hat{e}} = A^{i_1,\ldots,i_k}_{i_1,\ldots,i_k}.$$

Доказательство. Отметим, что $\hat{e}$ является базисом в подпространстве L_0, а функционал R, по следствию 2.6, является квадратичной формой на L_0.

Обозначим элементы матрицы A через $a_{i,j}$. В соответствии с определениями 2.2 и 1.2, эти элементы вычисляются по формуле

$$a_{i,j} = B(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j),$$

где B — билинейная форма, полярная к квадратичной форме Q. Обозначим через B_0 сужение билинейной формы B на подпространство L_0: $B_0 = B|_{L_0}$. Для любого вектора $\mathbf{x}$ из L_0 имеем соотношения

$$R(\mathbf{x}) = Q(\mathbf{x}) = B(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = B_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}).$$

Таким образом, билинейная форма B_0 является полярной для квадратичной формы R. Следовательно, по определению матрицы квадратичной формы, элемент матрицы $R_{\hat{e}}$ с индексами (p, q) равен

$$B_0(\mathbf{e}_{i_p}, \mathbf{e}_{i_q}) = B(\mathbf{e}_{i_p}, \mathbf{e}_{i_q}) = a_{i_p, i_q}.$$

Это и означает, что $R_{\hat{e}} = A^{i_1,\ldots,i_k}_{i_1,\ldots,i_k}$. $\square$

1^0. Критерий строгой положительной определённости (критерий Сильвестра).

Теорема 6.1. *Пусть Q — квадратичная форма на L, e — базис в L. Тогда следующие условия равносильны:*
(a) $Q > 0$;
(b) *все главные миноры матрицы Q_e положительны;*
(c) *все угловые миноры матрицы Q_e положительны.*

Доказательство. Для доказательства равносильности условий (a), (b), (c) удобно воспользоваться круговой схемой: (a) $\Longrightarrow$ (b) $\Longrightarrow$ (c) $\Longrightarrow$ (a).

Сначала покажем, что из (a) следует (b). Пусть $Q > 0$, $A = Q_e$. Выберем произвольно индексы $i_1, \ldots, i_k$, такие что $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n$, и покажем, что $\det A^{i_1,\ldots,i_k}_{i_1,\ldots,i_k} > 0$. Воспользуемся леммой 6.3 и её обозначениями. По этой лемме, $\det A^{i_1,\ldots,i_k}_{i_1,\ldots,i_k} = \det R_{\hat{e}}$. Из условия $Q > 0$ следует, что $R > 0$ (действительно, для любого вектора $\mathbf{x}$ из $L_0 \setminus \{\mathbf{0}\}$ имеем $R(\mathbf{x}) = Q(\mathbf{x}) > 0$). Значит, по лемме 6.2, $\det(R_{\hat{e}}) > 0$.

Условие (c) очевидным образом следует из (b), так как любой угловой минор матрицы Q_e является её главным минором.

Докажем, что из (c) следует (a). Воспользуемся методом математической индукции. Если $\dim L = 1$, то квадратичная форма Q в любом базисе имеет вид $Q(\mathbf{x}) = ax_1^2$, и единственный угловой минор её матрицы равен a. По условию, он больше нуля. Следовательно, $ax_1^2 > 0$ при любом $x_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, т. е. квадратичная форма Q положительно определена.

Предположим, что доказываемое утверждение верно для размерности $n-1$. Докажем, что оно справедливо для размерности, равной n. Рассмотрим подпространство $L_0 = \ell(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{n-1})$ размерности $n-1$ и обозначим через R сужение квадратичной формы Q на это подпространство: $R = Q|_{L_0}$. По следствию 2.6 отображение R также является квадратичной формой. Все угловые миноры её матрицы в базисе $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{n-1})$ положительны, так как являются одновременно и угловыми минорами матрицы Q_e. Следовательно, по предположению индукции, квадратичная форма R положительно определена. Поэтому в некотором базисе $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_{n-1})$ она имеет нормальный вид:

$$R(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i^2, \quad \text{т. е.} R_{(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_{n-1})} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Каждый из векторов $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{n-1}$ линейно выражается через векторы $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_{n-1}$, поэтому система векторов $f = (\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_{n-1}, \mathbf{e}_n)$ является полной системой во всём пространстве L. Кроме того, f состоит из n векторов. Значит, f — базис в L. Поскольку $R = Q|_{L_0}$, то верхняя левая подматрица матрицы Q_f совпадает с матрицей квадратичной формы R в базисе $(\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_{n-1})$. Следовательно, Q имеет следующий вид в базисе f:

$$Q_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & a_{1,n} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & a_{n-1,n} \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \ldots & a_{n-1,n} & a_{n,n} \end{pmatrix},$$

т. е.

$$Q(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1} a_{i,n} x_i x_n + a_{n,n} x_n^2.$$

Выделим полный квадрат по каждой переменной x_i, где $i \in \overline{1, n-1}$:

$$x_i^2 + 2a_{i,n} x_i x_n = (x_i + a_{i,n} x_n)^2 - a_{i,n}^2 x_n^2.$$

Сделаем линейное преобразование координат:

$$y_i = x_i + a_{i,n}x_n, \qquad i \in \overline{1, n-1}, \qquad y_n = x_n.$$

Тогда

$$Q(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n-1}(x_i^2 + 2a_{i,n}x_ix_n) + a_{n,n}x_n^2 = \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 + cy_n^2, \tag{6.1}$$

где $c = a_{n,n} - a_{1,n}^2 - \ldots - a_{n-1,n}^2$. Матрица этого линейного преобразования равна

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & a_{1,n} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

и её определитель равен 1. Значит, линейное преобразование является невырожденным и соответствует переходу от базиса $f = (\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_{n-1}, \mathbf{e}_n)$ к некоторому новому базису $u = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$. Квадратичная форма Q в новом базисе имеет канонический вид (6.1), поэтому её матрица диагональна:

$$Q_u = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & c \end{pmatrix}.$$

Её определитель равен c. Из условия $\det Q_e > 0$ и леммы 6.1 следует, что $c > 0$. Поэтому $\mathrm{r}_+(Q) = n$ и, следовательно, $Q > 0$. $\square$

2^0. Критерий строгой отрицательной определённости.

Теорема 6.2. *Пусть Q — квадратичная форма на L, e — базис в L. Тогда следующие условия равносильны:*

(a) $Q < 0$;

(b) *все главные миноры чётного порядка матрицы Q_e положительны, а все главные миноры нечётного порядка матрицы Q_e отрицательны,*

(c) *все угловые миноры чётного матрицы Q_e положительны, а все угловые миноры нечётного порядка матрицы Q_e отрицательны.*

Доказательство. Рассмотрим квадратичную форму $-Q$. Как известно, определитель меняет знак при умножении какой-то его строки на -1. Поэтому при одновременном умножении всех элементов матрицы k-го порядка на -1 её определитель умножается на $(-1)^k$. В нашей ситуации это означает, что любой минор k-го порядка матрицы $(-Q)_e$ получается из соответствующего минора матрицы Q_e умножением на $(-1)^k$. Осталось применить теорему 6.1 к квадратичной форме $-Q$. □

Замечание 6.1. При $\dim L \geqslant 2$ из неотрицательности всех угловых миноров матрицы Q_e, вообще говоря, не следует $Q \geqslant 0$. Например, рассмотрим на $\mathbb{R}^2$ квадратичные формы

$$Q_1(\mathbf{x}) = -\xi_2^2, \qquad Q_2(\mathbf{x}) = \xi_1^2 - \xi_2^2.$$

Первая неположительна, вторая неопределена. Однако их матрицы

$$Q_{1,e} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad Q_{2,e} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

содержат только неотрицательные угловые миноры.

3^0. Критерий нестрого положительной определённости.

На первом курсе студенты несколько раз встречаются с применениями алгебры в математическом анализе (например, при интегрировании рациональных функций и при изучении функций нескольких переменных). Покажем пример использования аналитических методов в алгебре: выведем формулу для дифференцирования определителя и с помощью этой формулы докажем критерий нестрогой определённости квадратичной формы.

Напомним формулу производной от произведения n функций:

$$(f_1(t)f_2(t)\cdot\ldots\cdot f_n(t))' =$$
$$= f_1'(t)f_2(t)\cdot\ldots\cdot f_n(t) + f_1(t)f_2'(t)\cdot\ldots\cdot f_n(t) + \ldots + f_1(t)f_2(t)\cdot\ldots\cdot f_n'(t).$$

Правая часть состоит из n слагаемых, причём k-е слагаемое получается из исходного произведения в результате дифференцирования k-го сомножителя.

Следствием и обобщением этой формулы является формула производной определителя.

Лемма 6.4. *Пусть $a_{i,j}$, где $i, j \in \overline{1, n}$ — вещественнозначные функции, определённые и дифференцируемые на $\mathbb{R}$. Тогда функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, действующая по правилу*

$$f(t) = \begin{vmatrix} a_{1,1}(t) & a_{1,2}(t) & \ldots & a_{1,n}(t) \\ a_{2,1}(t) & a_{2,2}(t) & \ldots & a_{2,n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1}(t) & a_{n,2}(t) & \ldots & a_{n,n}(t) \end{vmatrix},$$

тоже дифференцируема на $\mathbb{R}$, и её производная вычисляется по следующей формуле:

$$f'(t) = \begin{vmatrix} a'_{1,1}(t) & a'_{1,2}(t) & \ldots & a'_{1,n}(t) \\ a_{2,1}(t) & a_{2,2}(t) & \ldots & a_{2,n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1}(t) & a_{n,2}(t) & \ldots & a_{n,n}(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,1}(t) & a_{1,2}(t) & \ldots & a_{1,n}(t) \\ a'_{2,1}(t) & a'_{2,2}(t) & \ldots & a'_{2,n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1}(t) & a_{n,2}(t) & \ldots & a_{n,n}(t) \end{vmatrix} +$$

$$+ \ldots + \begin{vmatrix} a_{1,1}(t) & a_{1,2}(t) & \ldots & a_{1,n}(t) \\ a_{2,1}(t) & a_{2,2}(t) & \ldots & a_{2,n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{n,1}(t) & a'_{n,2}(t) & \ldots & a'_{n,n}(t) \end{vmatrix}.$$

Таким образом, производная определителя n-го порядка равна сумме n определителей n-го порядка, причём k-е слагаемое (для любого $k \in \overline{1, n}$) получается из исходного определителя дифференцированием k-й строки.

Доказательство. По определению, определитель равен следующей сумме произведений элементов матрицы:

$$f(t) = \sum_{\varphi \in S_n} \operatorname{sgn}(\varphi) a_{1,\varphi(1)}(t) a_{2,\varphi(2)}(t) \cdot \ldots \cdot a_{n,\varphi(n)}(t).$$

Здесь S_n — множество всех подстановок n-го порядка, $\operatorname{sgn}(\varphi)$ — сигнатура (знак) подстановки φ. Теперь применим формулы для дифференцирования суммы и произведения и получим:

$$f'(t) = \sum_{\varphi \in S_n} \operatorname{sgn}(\varphi) \Big(a'_{1,\varphi(1)}(t) a_{2,\varphi(2)}(t) \cdot \ldots \cdot a_{n,\varphi(n)}(t) +$$

$$+ a_{1,\varphi(1)}(t) a'_{2,\varphi(2)}(t) \cdot \ldots \cdot a_{n,\varphi(n)}(t) + \ldots + a_{1,\varphi(1)}(t) a_{2,\varphi(2)}(t) \cdot \ldots \cdot a'_{n,\varphi(n)}(t) \Big).$$

Изменим порядок суммирования:

$$\begin{aligned}
f'(t) = &\sum_{\varphi \in S_n} \operatorname{sgn}(\varphi) a'_{1,\varphi(1)}(t) a_{2,\varphi(2)}(t) \cdot \ldots \cdot a_{n,\varphi(n)}(t) + \\
&+ \sum_{\varphi \in S_n} \operatorname{sgn}(\varphi) a_{1,\varphi(1)}(t) a'_{2,\varphi(2)}(t) \cdot \ldots \cdot a_{n,\varphi(n)}(t) + \\
&+ \ldots + \\
&+ \sum_{\varphi \in S_n} \operatorname{sgn}(\varphi) a_{1,\varphi(1)}(t) a_{2,\varphi(2)}(t) \cdot \ldots \cdot a'_{n,\varphi(n)}(t).
\end{aligned}$$

Получили правую часть доказываемой формулы. □

Для доказательства критерия нестрогой положительности квадратичной формы нам потребуется следующая лемма.

Лемма 6.5. *Пусть все главные миноры матрицы $A \in M_n(\mathbb{R})$ неотрицательны и $\varepsilon > 0$. Тогда все главные миноры матрицы $A+\varepsilon E_n$ положительны. Здесь E_n — единичная матрица порядка n.*

Доказательство. Докажем утверждение математической индукцией по n. При $n = 1$ получаем очевидное утверждение о числах: если $a_{11} \geqslant 0$ и $\varepsilon > 0$, то $a_{11} + \varepsilon > 0$.

Предположим теперь, что утверждение верно для любой квадратной матрицы порядка $n-1$, и докажем его для квадратной матрицы A порядка n. Итак, пусть $A \in M_n(\mathbb{R})$, все главные миноры матрицы A неотрицательны и $\varepsilon > 0$. Рассмотрим подматрицы B_k $(k \in \overline{1,n})$ матрицы A, которые получаются из неё вычёркиванием k-й строки и k-го столбца:

$$B_1 = A^{2,3,\ldots,n}_{2,3,\ldots,n}, \quad B_2 = A^{1,3,\ldots,n}_{1,3,\ldots,n}, \quad \ldots, \quad B_n = A^{1,2,\ldots,n-1}_{1,2,\ldots,n-1}. \tag{6.2}$$

Любой главный минор матриц (6.2) является также главным минором матрицы A и поэтому неотрицателен. Следовательно, по предположению индукции, все главные миноры матриц

$$B_1 + \varepsilon E_{n-1}, \quad B_2 + \varepsilon E_{n-1}, \quad \ldots, \quad B_n + \varepsilon E_{n-1} \tag{6.3}$$

положительны. Заметим, что при $k < n$ любой главный минор k-го порядка матрицы $A+\varepsilon E_n$ является главным минором какой-то из матриц (6.3) и, следовательно, положителен. Осталось показать, что минор n-го порядка матрицы $A + \varepsilon E_n$, т. е. её определитель, тоже положителен: $\det(A + \varepsilon E_n) > 0$.

Рассмотрим функцию $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, действующую по правилу:

$$f(t) = \det(A + tE_n) = \begin{vmatrix} a_{1,1}+t & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2}+t & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n}+t \end{vmatrix}.$$

По лемме 6.4, производная этой функции равна

$$f'(t) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2}+t & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n}+t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,1}+t & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n}+t \end{vmatrix} +$$

$$+ \dots + \begin{vmatrix} a_{1,1}+t & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2}+t & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Раскладывая i-е слагаемое по i-й строке ($i \in \overline{1,n}$), получим:

$$f'(t) = |B_1 + tE_{n-1}| + |B_2 + tE_{n-1}| + \dots + |B_n + tE_{n-1}|.$$

По предположению индукции, при $t > 0$ все полученные слагаемые положительны. Следовательно, $f'(t) > 0$ при любом $t > 0$. Поэтому функция f растёт при $t > 0$, и $f(\varepsilon) > f(0) \geqslant 0$, т. е. $\det(A + \varepsilon E_n) > 0$. $\square$

Теорема 6.3. *Пусть Q — квадратичная форма на L, e — базис в L. Тогда условие $Q \geqslant 0$ равносильно тому, что все главные миноры матрицы Q_e неотрицательны.*

Доказательство. Неотрицательность всех главных миноров выводится из условия $Q \geqslant 0$ с помощью леммы 6.2, так же, как в доказательстве теоремы 6.1 (с заменой неравенств $Q > 0$, $\tilde{Q} > 0$ и $\det A^{i_1,\dots,i_k}_{i_1,\dots,i_k} > 0$ на соответствующие нестрогие неравенства).

Обратно, пусть все главные миноры матрицы Q_e неотрицательны. Рассмотрим квадратичную форму $Q + \varepsilon I$, где $I_e = E_n$. По лемме 6.5, все главные миноры матрицы $Q_e + \varepsilon E_k$ положительны. Значит, по теореме 6.1, квадратичная форма $Q + \varepsilon I$ строго положительна. Выберем произвольно и зафиксируем вектор $\mathbf{x} \in L \setminus \{0\}$. Имеем неравенство:

$$Q(\mathbf{x}) + \varepsilon I(\mathbf{x}) > 0.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим неравенство $Q(\mathbf{x}) \geqslant 0$. Так как вектор $\mathbf{x}$ из $L \setminus \{0\}$ был выбран произвольно, это означает, что $Q \geqslant 0$. □

4^0. Критерий нестрогой отрицательной определённости.

Теорема 6.4. *Пусть Q — квадратичная форма в L, e — базис в L. Тогда условие $Q \leqslant 0$ равносильно тому, что все главные миноры чётных порядков матрицы Q_e неотрицательны, а все главные миноры нечётных порядков матрицы Q_e неположительны.*

Доказательство полностью повторяет доказательство теоремы 6.2, только теперь вместо теоремы 6.1 используется теорема 6.3. □

5^0. Критерий знакопеременности квадратичной формы.

Теорема 6.5. *Пусть Q — квадратичная форма в L, e — базис в L. Тогда следующие условия равносильны:*
(a) $Q \gtrless 0$;
(b) *в матрице Q_e существует отрицательный минор чётного порядка или в матрице Q_e существуют миноры нечётных порядков с разными знаками.*

Доказательство. Действительно, условие $Q \gtrless 0$ выполняется тогда и только тогда, когда неверно $Q \geqslant 0$ и неверно $Q \leqslant 0$. Запишем эти условия в терминах главных миноров, пользуясь теоремами 6.3 и 6.4:

неверно $Q \geqslant 0$: в матрице Q_e существует отрицательный главный минор чётного порядка или в матрице Q_e существует отрицательный главный минор нечётного порядка;

неверно $Q \leqslant 0$: в матрице Q_e существует отрицательный главный минор чётного порядка или в матрице Q_e существует положительный главный минор нечётного порядка.

Система этих условий равносильна условию (b) доказываемой теоремы. Это следует из логического тождества $(a \vee b) \wedge (a \vee c) \equiv a \vee (b \wedge c)$. □

Упражнения для самостоятельного решения

Упражнение 6.1. Пусть A — квадратная матрица n-го порядка. Найти число главных миноров k-го порядка матрицы A. Найти общее число главных миноров матрицы A.

Упражнение 6.2. Пусть Q — квадратичная форма в пространстве L размерности 2, e — базис в L. Обозначим элементы матрицы Q_e через $a_{i,j}$:

$$Q_e = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}.$$

Обосновать следующую схему исследования квадратичной формы Q на знакоопределённость (для каждого случая проверить истинность вывода и доказать, что других случаев быть не может):

1) если $\det Q_e > 0$:
   1a) если $a_{1,1} > 0$, то $Q > 0$;
   1b) если $a_{1,1} < 0$, то $Q < 0$;
2) если $\det Q_e < 0$, то $Q \gtrless 0$;
3) если $\det Q_e = 0$ и $Q_e \neq 0$:
   3a) если $a_{1,1} \geqslant 0$ и $a_{2,2} \geqslant 0$, то $Q \geqq 0$;
   3b) если $a_{1,1} \leqslant 0$ и $a_{2,2} \leqslant 0$, то $Q \leqq 0$;
4) если $Q_e = 0$, то $Q = 0$.

§ 7. Примеры исследования на знакоопределённость

В каждом из следующих примеров дана квадратичная форма в некотором базисе. Требуется, не находя её канонического вида, определить тип знакоопределённости, т. е. выяснить, является ли квадратичная форма положительно или отрицательно определённой, квазиположительной, квазиотрицательной или неопределённой.

Пример 7.1. $Q(\mathbf{x}) = 3x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.

Решение. Для матрицы квадратичной формы

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

найдём все угловые миноры:

$$\Delta_1 = 3, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 3, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

Все угловые миноры положительны. Значит, по теореме 6.1, квадратичная форма строго положительна: $Q > 0$. □

Пример 7.2. $Q(\mathbf{x}) = -3x_1^2 - 2x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.

Решение. Записываем матрицу квадратичной формы:

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix},$$

вычисляем её угловые миноры:

$$\Delta_1 = -3, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \end{vmatrix} = -4.$$

Оба угловых минора нечётного порядка отрицательны, а угловой минор чётного порядка положителен. Значит, по теореме 6.2, квадратичная форма отрицательно определена: $Q < 0$. □

Пример 7.3. $Q(\mathbf{x}) = -2x_1^2 - x_2^2 - 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$.

Решение. Составим матрицу квадратичной формы:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Вычислим её угловые миноры:

$$\Delta_1 = -2, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

В этом примере только по значениям угловых миноров дать ответ нельзя (можно лишь утверждать, что Q не является ни строго положительной, ни строго отрицательной). Найдём все главные миноры.

Для главных миноров квадратичной формы введём краткое обозначение: вместо $\det\left((Q_e)^{i_1,\ldots,i_k}_{i_1,\ldots,i_k}\right)$ будем писать просто $\delta_{i_1,\ldots,i_k}$.

Кроме угловых, есть ещё два главных минора первого порядка: $\delta_2 = -1$, $\delta_3 = -2$, и два главных минора второго порядка:

$$\delta_{1,3} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0, \qquad \delta_{2,3} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1.$$

Таким образом, все главные миноры нечётного порядка неположительны и все главные миноры чётного порядка неотрицательны. Значит, по теореме 6.4, квадратичная форма нестрого отрицательна: $Q \leqslant 0$. Поскольку матрица не является строго отрицательной, то она квазиотрицательна: $Q \leqq 0$. $\square$

Пример 7.4. $Q(\mathbf{x}) = 4x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 8x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.

Решение. Составляем матрицу квадратичной формы:

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 & -2 \\ -4 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Находим её угловые миноры:

$$\Delta_1 = 4, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} = 0, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & -4 & -2 \\ -4 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

В этом случае только по значениям угловых миноров дать ответ нельзя. Найдём остальные главные миноры:

$$\delta_2 = 4, \quad \delta_3 = 1, \quad \delta_{1,3} = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \delta_{2,3} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким образом, все главные миноры неотрицательны. Значит, по теореме 6.3, квадратичная форма неотрицательно определена (нестрого положительна): $Q \geqslant 0$. При этом квадратичная форма не является строго положительной. Значит, она квазиположительна: $Q \geqq 0$. $\square$

Пример 7.5. $Q(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 6x_2x_3$.

Решение. Матрица этой квадратичной формы имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & -3 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Находим её угловые миноры:

$$\Delta_1 = 2, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 0, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & -3 \\ 3 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

В этом случае опять только по значениям угловых миноров дать ответ нельзя. Остальные главные миноры:

$$\delta_2 = 2, \quad \delta_3 = 4, \quad \delta_{1,3} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1, \quad \delta_{2,3} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = -1.$$

Имеется отрицательный главный минор чётного порядка. Следовательно, по теореме 6.5, квадратичная форма неопределённая: $Q \gtrless 0$. □

Пример 7.6. Не приводя квадратичную форму к каноническому виду, найти все значения параметра μ, при которых она положительно определена:

$$Q(\mathbf{x}) = x_1^2 - \mu x_2^2 - \mu x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

Решение. Всё по-прежнему не очень сложно. Найдём все угловые миноры матрицы квадратичной формы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -\mu & 2 \\ 1 & 2 & -\mu \end{pmatrix}$$

и выясним, при каких μ они положительны.

$$\Delta_1 = 1, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -\mu \end{vmatrix}, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -\mu & 2 \\ 1 & 2 & -\mu \end{vmatrix} = \mu^2 + 5\mu + 4.$$

Теперь нужно решить систему неравенств:

$$\begin{cases} \Delta_1 = 1 > 0, \\ \Delta_2 = -\mu - 4 > 0, \\ \Delta_3 = \mu^2 + 5\mu + 4 > 0, \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \mu < -4, \\ \mu < -4 \quad \text{или} \quad \mu > -1. \end{cases}$$

Окончательно получаем $\mu < -4$. При этих значениях параметра квадратичная форма положительно определена. □

Пример 7.7. Для каждого значения параметра μ выяснить тип (знакоопределённость) квадратичной формы, не приводя её к каноническому виду:

$$Q(\mathbf{x}) = \mu x_1^2 + (\mu - 3)x_2^2 + \mu x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3.$$

Решение. Найдём все главные (не только угловые) миноры матрицы квадратичной формы
$$\begin{pmatrix} \mu & 2 & 1 \\ 2 & \mu-3 & -2 \\ 1 & -2 & \mu \end{pmatrix}.$$
Угловые миноры первого, второго и третьего порядка соответственно равны
$$\Delta_1 = \mu, \qquad \Delta_2 = \mu^2 - 3\mu - 4 = (\mu+1)(\mu-4),$$
$$\Delta_3 = \mu^3 - 3\mu^2 - 9\mu - 5 = (\mu+1)^2(\mu-5).$$
Есть ещё два главных минора первого порядка:
$$\delta_2 = \mu - 3, \qquad \delta_3 = \mu,$$
и два главных минора второго порядка:
$$\delta_{1,3} = \mu^2 - 1 = (\mu+1)(\mu-1), \qquad \delta_{2,3} = \mu^2 - 3\mu - 4 = (\mu+1)(\mu-4).$$
Найдём сначала все значения μ, при которых квадратичная форма положительно определена. Для этого нужно решить систему неравенств
$$\begin{cases} \Delta_1 = \mu > 0, \\ \Delta_2 = (\mu+1)(\mu-4) > 0, \\ \Delta_3 = (\mu+1)^2(\mu-5) > 0, \end{cases} \iff \begin{cases} \mu > 0, \\ \mu < -1 \quad \text{или} \quad \mu > 4, \\ \mu > 5. \end{cases}$$
Отсюда получаем, что $Q > 0$ при $\mu > 5$.

Квадратичная форма нестрого положительна, если все главные миноры неотрицательны, в том числе и все угловые миноры. Но последние неотрицательны при $\mu \geqslant 5$. Здесь неисследованным является лишь значение $\mu = 5$. Вычислим значения всех остальных главных миноров при $\mu = 5$: $\delta_2 = 5-3 > 0$, $\delta_3 = 5 > 0$, $\delta_{1,3} = 5^2 - 1 > 0$, $\delta_{2,3} = (5+1)(5-4) > 0$. Значит, при $\mu = 5$ квадратичная форма нестрого отрицательна. А так как при этом значении она не является положительно определённой, то она квазиположительно определена.

Найдём теперь все значения μ, при которых квадратичная форма отрицательно определена. Для этого нужно решить следующую систему неравенств:
$$\begin{cases} \Delta_1 = \mu < 0, \\ \Delta_2 = (\mu+1)(\mu-4) > 0, \\ \Delta_3 = (\mu+1)^2(\mu-5) < 0, \end{cases} \iff \begin{cases} \mu < 0, \\ \mu < -1 \quad \text{или} \quad \mu > 4, \\ \mu < 5 \quad \text{или} \quad \mu \neq -1. \end{cases}$$
Отсюда получаем, что $Q < 0$ при $\mu < -1$.

Квадратичная форма нестрого отрицательна (другими словами, неположительно определена), если все главные миноры чётного порядка неотрицательны и все главные миноры нечётного порядка неположительны. Для угловых миноров это выполняется при $\mu \leqslant -1$. Здесь осталось исследовать лишь значение $\mu = -1$. Вычислим значения всех остальных главных миноров при $\mu = -1$: $\delta_2 = -1 - 3 < 0$, $\delta_3 = -1 < 0$, $\delta_{1,3} = (-1)^2 - 1 = 0$, $\delta_{2,3} = (-1+1)(-1-4) = 0$. Значит, при $\mu = -1$ квадратичная форма неположительна. Но при этом значении она не является отрицательно определённой. Значит, она квазиотрицательно определена.

При остальных значениях параметра μ квадратичная форма неопределена. Теперь можно подвести итог. При $\mu < -1$ квадратичная форма отрицательно определена. При $\mu = -1$ квадратичная форма неположительна и, более того, квазиотрицательно определена. При $-1 < \mu < 5$ квадратичная форма неопределена. При $\mu = 5$ квадратичная форма неотрицательна и, более того, квазиположительно определена. При $\mu > 5$ квадратичная форма положительно определена. Ответ можно оформить в виде таблицы:

$\mu < -1$	$\mu = -1$	$-1 < \mu < 5$	$\mu = 5$	$\mu > 5$
$Q < 0$	$Q \leqq 0$	$Q \gtrless 0$	$Q \geqq 0$	$Q > 0$

$\square$

Упражнения для самостоятельного решения

Упражнение 7.1. Не находя канонического вида, выяснить, являются ли следующие квадратичные формы положительно или отрицательно определёнными, неположительными, неотрицательными или неопределёнными.

a) $Q(\mathbf{x}) = 4x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 + 6x_1x_2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3$;
b) $Q(\mathbf{x}) = -3x_1^2 - 4x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 2x_2x_3$;
c) $Q(\mathbf{x}) = -3x_1^2 - 3x_2^2 - 4x_3^2 + 6x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$;
d) $Q(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;
e) $Q(\mathbf{x}) = -6x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$;
f) $Q(\mathbf{x}) = 3x_1^2 - 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.

Упражнение 7.2. Не приводя к каноническому виду, для каждого значения вещественного параметра μ выяснить тип следующих квадратичных форм (их знакоопределённость):

a) $Q(\mathbf{x}) = \mu x_1^2 + \mu x_2^2 + \mu x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$;
b) $Q(\mathbf{x}) = (\mu^2 + 3\mu)x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 2\mu x_1x_3 - 2x_2x_3$;

c) $Q(\mathbf{x}) = \mu x_1^2 + \mu x_2^2 + (2\mu+1)x_3^2 + 2x_1x_2 - 2\mu x_1x_3 - 2x_2x_3$;
d) $Q(\mathbf{x}) = (\mu-1)x_1^2 + 2\mu x_2^2 + (\mu-2)x_3^2 + 2\mu x_1x_2 - 2\mu x_1x_3 - 2\mu x_2x_3$;
e) $Q(\mathbf{x}) = (\mu-1)x_1^2 + 2\mu x_2^2 + (\mu-2)x_3^2 + (2\mu-2)x_1x_2 - 2\mu x_1x_3 - 2\mu x_2x_3$;
f) $Q(\mathbf{x}) = (1-\mu)x_1^2 + (2-2\mu)x_2^2 + \mu x_3^2 - 4\mu x_1x_3$.

Ответы

7.1. a) $Q > 0$; b) $Q < 0$; c) $Q \leqq 0$; d) $Q \geqq 0$; e), f) $Q \gtrless 0$.

7.2. a)

$\mu < -2$	$\mu = -2$	$-2 < \mu < 4$	$\mu = 4$	$\mu > 4$
$Q < 0$	$Q \leqq 0$	$Q \gtrless 0$	$Q \geqq 0$	$Q > 0$

b)

$\mu < 8/7$	$\mu = 8/7$	$\mu > 8/7$
$Q \gtrless 0$	$Q \geqslant 0$	$Q > 0$

c)

$\mu < -1$	$\mu = -1$	$-1 < \mu < 1$	$\mu = 1$	$\mu > 1$
$Q < 0$	$Q \leqq 0$	$Q \gtrless 0$	$Q \geqq 0$	$Q > 0$

d)

$\mu < 0$	$\mu = 0$	$\mu > 0$
$Q < 0$	$Q \leqq 0$	$Q \gtrless 0$

e)

$\mu < -1$	$\mu = -1$	$\mu > -1$
$Q < 0$	$Q \leqq 0$	$Q \gtrless 0$

f)

$\mu < 0$	$\mu = 0$	$0 < \mu < 1/5$	$\mu = 1/5$	$\mu > 1/5$
$Q \gtrless 0$	$Q \geqq 0$	$Q > 0$	$Q \geqq 0$	$Q \gtrless 0$

Литература

Учебники:

[1] *Беклемишев, Д. В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: Учебник для вузов. / Д. В. Беклемишев. — 10-е изд., испр. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 304 с.

[2] *Винберг, Э. Б.* Курс алгебры. / Э. Б. Винберг. — М.: Факториал Пресс, 2001. — 544 с.

[3] *Гантмахер, Ф. Р.* Теория матриц. / Ф. Р. Гантмахер. — М.: Наука, 1988. — 552 с.

[4] *Гельфанд, И. М.* Лекции по линейной алгебре. 5-е изд., исправленное. / И. М. Гельфанд. — М.: Добросвет, МЦНМО, 1998. — 320 с.

[5] *Ефимов, Н. В.* Линейная алгебра и многомерная геометрия. / Н. В. Ефимов, Э. Р. Розендорн. — М.: Наука, 1974. — 544 с.

[6] *Ильин, В. А.* Линейная алгебра: Учебник для вузов. / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. — 5-е изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. — 320 с.

[7] *Козак, А. В.* Линейная алгебра. / А. В. Козак, В. С. Пилиди. — М.: Вузовская книга, 2001. — 216 с.

[8] *Кострикин, А. И.* Введение в алгебру. Часть II. Линейная алгебра: Учебник для вузов. / А. И. Кострикин. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2000. — 368 с.

Методические указания:

[9] *Дыбин, В. Б.* Лекции по линейной алгебре. Часть II. Выпуск 4. Функционалы. / В. Б. Дыбин. — Ростов-на-Дону: УПЛ РГУ, 2000.

[10] *Козак, А. В.* Линейные пространства. Часть 1. Основные определения. / А. В. Козак, В. С. Пилиди. — Ростов-на-Дону: УПЛ РГУ, 1985.

[11] *Козак, А. В.* Линейные пространства. Часть 2. Подпространства. Ранг матрицы. / А. В. Козак, В. С. Пилиди. — Ростов-на-Дону: УПЛ РГУ, 1985.

[12] *Козак, А. В.* Определители. / А. В. Козак, В. С. Пилиди. — Ростов-на-Дону: УПЛ РГУ, 1984.